Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051MT maandag 10 juni 2002, 14.00 - 17.00 uur

---

1. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt : $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \dfrac{2}{s^2+4} + e^{-\pi s}$ en dus

$$(s+2)Y(s) = 1 + \frac{2}{s^2+4} + e^{-\pi s} = \frac{s^2+6}{s^2+4} + e^{-\pi s}.$$

Hieruit volgt dat

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s+2)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{s+2}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we dan :

$$\frac{s^2+6}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

en dus

$$s^2+6 = A(s^2+4) + Bs(s+2) + C(s+2) = (A+B)s^2 + (2B+C)s + 4A + 2C.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2B+C=0 \\ 4A+2C=6 \end{cases} \implies A = \frac{5}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \quad \text{en} \quad C = \frac{1}{2}.$$

Dus :

$$Y(s) = \frac{5}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s+2}.$$

Terugtransformeren levert ten slotte :

$$y(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t + u_\pi(t)e^{-2(t-\pi)}.$$

2. Stel dat $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, dan volgt : $sY(s) - y(0) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{s}{s^2+1}Y(s)$ oftewel

$$s\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{s^3}{s^2+1}Y(s) = \frac{s+1}{s}.$$

Dus :

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s^4} = \frac{s^3+s^2+s+1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4}.$$

Terugtransformeren geeft dan :

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

3. Bepaal eerst de eigenvectoren van A :

$$r_1 = r_2 = 1 \ : \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_3 = -1 \ : \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De matrix A is dus niet diagonaliseerbaar. We bepalen daarom een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}_2$ behorende bij de eigenwaarde $r = 1$: $(A - I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1$. Dus :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De algemene oplossing van het homogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus :

$$\underline{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Vervolgens zoeken we een particuliere oplossing $\underline{x}_p(t)$ van het inhomogene stelsel $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$. Stel $\underline{x}_p(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)e^{-t}$, dan volgt :

$$-\underline{u}_1 t - \underline{u}_2 + \underline{u}_1 = A\underline{u}_1 t + A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt :

$$\begin{cases} A\underline{u}_1 = -\underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\underline{u}_2 + \underline{u}_1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (A + I)\underline{u}_1 = \underline{o} \\ (A + I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Dus : $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ zo bepaald moet worden dat $(A+I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ oplosbaar is :

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & \alpha-2 \\ -4 & 6 & 4 & 2\alpha \\ 6 & -7 & -4 & -2\alpha-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 4 & 4 & 4\alpha-4 \\ 0 & -4 & -4 & -5\alpha+4 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\alpha = 0$ (en dus $\underline{u}_1 = \underline{o}$) gekozen moet worden. Verder volgt dan :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De oplossing van het inhomogene stelsel is dus :

$$\underline{x}(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4. (a) Voor de kritieke punten moet gelden dat $\dfrac{dx}{dt} = 0$ en $\dfrac{dy}{dt} = 0$ oftewel

$$(x-1)(y-2) = 0 \quad \text{en} \quad xy = 0.$$

Hieruit volgt : $(x,y) = (1,0)$ en $(x,y) = (0,2)$ zijn de enige kritieke punten.

(b) Stel dat $F(x,y) = (x-1)(y-2)$ en $G(x,y) = xy$, dan volgt dat

$$F_x = y-2, \quad F_y = x-1, \quad G_x = y \quad \text{en} \quad G_y = x.$$

Voor $(x,y) = (1,0)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_1 = 1 \quad \text{en} \quad r_2 = -2.$$

Dus : $(x,y) = (1,0)$ is een zadelpunt. Voor $(x,y) = (0,2)$ vinden we dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}.$$

Dus : $(x,y) = (0,2)$ is een centerpunt.

(c) Het punt $(x,y) = (1,0)$ is dus een instabiel zadelpunt, terwijl $(x,y) = (0,2)$ een spiraalpunt of een centerpunt kan zijn. De stabiliteit van het punt $(x,y) = (0,2)$ kan hiermee niet bepaald worden.

5. (a) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$ met

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-x)\,d\sin\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0 - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$ met

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-x)\,d\cos\frac{n\pi x}{2} = -\frac{2}{n\pi}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

(c) Stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, dan volgt : $X''(x)T(t) = 4X(x)T'(t)$ en dus :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = 4\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Dus : $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $4T'(t) - \sigma T(t) = 0$. Uit de randvoorwaarden volgt : $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Beschouw dus eerst :

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we : $X''(x) = 0$. Dus : $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus : $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \lambda^2 > 0$, dan volgt : $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1\cosh\lambda x + b_2\sinh\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2\sinh 2\lambda = 0$. Dus : $b_2 = 0$, want $\lambda \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\lambda^2 < 0$, dan volgt : $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2\sin 2\lambda = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ oftewel $\lambda = \frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden :

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t/16}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

Uit de beginvoorwaarde volgt :

$$u(x,0) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{2} = f(x).$$

Dit is een Fouriersinusreeks voor f, dus met onderdeel (b) vinden we nu :

$$c_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$