Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 19 januari 2015, 18:30-21.30 uur

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd. U mag ook gebruik maken van een simpele rekenmachine (geen grafische mogelijkheden, geen tekstinvoer).

De punten: opg.1: **8** pt; opg.2: **8** pt; opg.3: **9** pt; opg.4: **11** pt; opg.5: **9** pt.

1. **a.** Toon aan dat de Bernoulli differentiaalvergelijking $y'(t) + 2y(t) = t \cdot (y(t))^3$ via de substitutie $v(t) = 1/(y(t))^2$ overgaat in een (lineaire) DV. Geef deze lineaire DV.

b. Bereken *met behulp van de Laplace-getransformeerde* de oplossing van het beginwaardenprobleem $y''(t) + 4y(t) = g(t) + \delta(t - \frac{5}{2}\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, waarbij $g(t) = 1$ voor $\frac{1}{2}\pi \le t \le \pi$, en $g(t) = 0$ buiten het interval $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$.

2. In deze opgave wordt je gevraagd om een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ met beginwaarde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ op te lossen via het diagonaliseren van de matrix A.
De gegevens:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

a. Toon aan dat dit stelsel door de substitutie $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ overgaat in het 'ontkoppelde' stelsel $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$, waarbij $\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$. Wat wordt de beginwaarde voor $\mathbf{y}(0)$?

b. Bereken de oplossing van dit stelsel met beginvoorwaarde voor $\mathbf{y}$, en bepaal de corresponderende oplossing $\mathbf{x}(t)$ van het oorspronkelijke beginwaardenprobleem.

3. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Bereken de algemene (uiteraard: reële) oplossing van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

b. Classificeer het stationaire punt (0,0) en geef een schets van een aantal oplossingen in het fasevlak.

c. Bereken de oplossing van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ -5e^{2t} \end{bmatrix}$ die start (op $t = 0$) in het punt $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. In deze opgave onderzoeken we het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = (1+x)(2-y), \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = x\,y$$

a. Bereken de stationaire punten (evenwichtspunten) van het stelsel.

b. Ga na welke oplossingskrommen er zijn waarbij hetzij x hetzij y constant is. Met andere woorden: voor welke C bestaat er een oplossing $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t) \\ C \end{bmatrix}$ dan wel een oplossing $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ h(t) \end{bmatrix}$?

c. Bepaal bij elk van de stationaire punten via het gelineariseerde stelsel wat de aard is (knoop, zadelpunt, etc, stabiel of instabiel). Geef zo mogelijk ook de aard in het niet-gelineariseerde stelsel.

d. Schets de oplossingen in het fasevlak. Neem daarin ook de oplossingskrommen uit onderdeel **b.** mee!

e. Merk op dat je via $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ een differentiaalvergelijking voor de oplossingskrommen ('trajectories') krijgt die separabel is. Bepaal de (impliciete) oplossingen van die differentiaalvergelijking. Bedenk daarbij dat $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (+C)$

5. Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende partiële differentiaalvergelijking met randvoorwaarden:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{(I)} \\ u(0,y) = u(4,y) = 0 & \text{(II)} \\ u(x,0) = 0 & \text{(III-a)} \\ u(x,2) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi x) & \text{(III-b)} \end{cases}$$

op het domein $D\colon\ 0 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 2.$

Uitwerkingen

1a Deel de hele vergelijking door $y(t)^3$: $\dfrac{y'(t)}{y(t)^3}+\dfrac{2}{y(t)^2}=t$.

Merk op: $v(t)=\dfrac{1}{y(t)^2}\Rightarrow v'(t)=-2\dfrac{y'(t)}{y(t)^3}$ (kettingregel!), en dus $\dfrac{y'(t)}{y(t)^3}=-\frac{1}{2}v'(t)$.
Substitutie in de herschreven DV geeft voor v: $-\frac{1}{2}v'(t)+2v(t)=t$, inderdaad een lineaire DV. Eventueel kan je het nog iets eenvoudiger schrijven: $v'(t)-4v(t)=-2t$.

Anders opgeschreven: $v(t)=\dfrac{1}{y(t)^2}\leftrightarrow y(t)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{v(t)}}$, dus dan $y'(t)=(\pm)-\dfrac{1}{2}\dfrac{v'(t)}{(v(t))^{3/2}}$.
Dit substitueren in de DV (de $(\pm)$ kun je links en rechts wegstrepen) geeft:

$$y'(t)+2y(t)=t\cdot(y(t))^3\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{2}\frac{v'(t)}{(v(t))^{3/2}}+\frac{2}{\sqrt{v(t)}}=t(v(t))^{-3/2}\quad\Rightarrow\quad-v'(t)+4v(t)=2t$$

1b Ten eerste: het rechterlid kan geschreven worden als $u_{\frac{1}{2}\pi}(t)-u_\pi(t)+\delta(t-3\pi)$.

Laplace transformeren: $s^2Y(s)-1+4Y(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s}-\dfrac{e^{-2\pi s}}{s}+e^{-3\pi s}$.

Herscheven: $Y(s)=\dfrac{1}{s^2+4}+\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\pi s}}{s(s^2+4)}-\dfrac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}+\dfrac{e^{-\frac{5}{2}\pi s}}{s^2+4}$.

Terugtransformeren van de eerste en de laatste term rechts: $\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin(2(t-\frac{5}{2}\pi))u_{\frac{5}{2}\pi}(t)$.

Voor de middelste twee termen kun je eerst $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ terugtransformeren.
Het toverwoord: breuksplitsen!

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+Bs^2+Cs}{s(s^2+4)}$$

Tellers gelijkstellen geeft $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$
en daarmee

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t)$$

Verwerken van de e-machten geeft 'verschuivingen', en als **eindantwoord**

$y(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2(t-\frac{1}{2}\pi))\right)u_{\frac{1}{2}\pi}(t)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2(t-\pi))\right)u_\pi(t)+\frac{1}{2}\sin(2(t-\frac{5}{2}\pi))u_{\frac{5}{2}\pi}(t)$
Woww! Gebruikmakend van $\sin(\alpha\pm\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha\pm\pi)=-\cos\alpha$:
$y(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos(2t)\right)u_{\frac{1}{2}\pi}(t)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t)\right)u_\pi(t)-\frac{1}{2}\sin(2t)u_{\frac{5}{2}\pi}(t)$

2a De crux: $A=PDP^{-1}\iff D=P^{-1}AP$.
Dus: $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}+\mathbf{g}\overset{\mathbf{x}=P\mathbf{y}}{\Longrightarrow}P\mathbf{y}'=AP\mathbf{y}+\mathbf{g}\quad\Longrightarrow\quad\mathbf{y}'=P^{-1}AP\mathbf{y}+P^{-1}\mathbf{g}=D\mathbf{y}+P^{-1}\mathbf{g}$.

Uitgeschreven: $\mathbf{y}'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\mathbf{y}+\begin{bmatrix}0\\0\\\sin t\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}y_1'&=&y_1\\y_2'&=&y_2\\y_3'&=&4y_3+\sin t\end{cases}$

De beginwaarde: $\mathbf{y}(0)=P^{-1}\mathbf{x}(0)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

2b $y_1' = y_1,\ y_1(0) = 1$ geeft eenvoudig $y_1(t) = e^t$, en hetzelfde voor $\mathbf{y}_2$.
$y_3' - 4y_3 = \sin t$ heeft als homogene oplossing $y_H = Ce^{4t}$, en als particuliere oplossing $y_P = A\sin t + B\cos t = \ldots = -\frac{4}{17}\sin t - \frac{1}{17}\cos t$.
De oplossing die voldoet aan $y(0) = 0$ wordt dan $\mathbf{y}_3(t) = \frac{1}{17}e^{4t} - \frac{4}{17}\sin t - \frac{1}{17}\cos t$.
De oplossing van het oorspronkelijke probleem: $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ \frac{e^{4t} - 4\sin t - \cos t}{17} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{4t} - 4\sin t - \cos t}{17}$$

3a Eerst de eigenwaarden en -vectoren:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - (-5)\cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Geeft de nulpunten (= eigenwaarden) $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$.
Eigenvector bij $\lambda_1 = -1 + i$ (ik laat de nulkolom in de aangevulde matrix weg):

$$\begin{bmatrix} 1-(-1+i) & 1 \\ -5 & -3-(-1+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -5 & -2-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (c)\begin{bmatrix} -1 \\ 2-i \end{bmatrix}$$

Waarbij in de laatste veegstap de eerste rij $(2+i)$ keer is opgeteld bij de tweede.
De complexe 'oplossing'

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i\sin t)$$

heeft als reëel en imaginair deel de *reële* oplossingen

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{-t}$$

en de algemene oplossing wordt dan $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_1(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3b Vanwege de *complexe* eigenwaarden met *negatief* reëel deel: de oorsprong is een stabiel spiraalpunt. Aan gezien het richtingsveld op de positieve x-as de richtingsvector $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ geeft lopen de spiralen rechtsom. (Gecombineerd met de richtingsvector $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ kun je concluderen dat de spiraal langgerekt is in min of meer de richting $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (het gemiddelde van die twee richtingsvectoren.))

3c Vanwege het 'eenvoudige' niet-homogene deel $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix} = \mathbf{u}e^{2t}$ kun je vast wel een particuliere oplossing van de vorm $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}e^{2t}$ proberen: substitutie in de DV geeft

$$2\mathbf{w}e^{-2t} = A\mathbf{w}e^{-2t} + \mathbf{u}e^{-2t} \leftrightarrow 2\mathbf{w} = A\mathbf{w} + \mathbf{u} \leftrightarrow (A - 2I)\mathbf{w} = -\mathbf{u}$$

Waaruit $\mathbf{w}$ kan worden opgelost via

$$[(A-2I)|-\mathbf{u}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ -5 & -5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De algemene oplossing: $\quad \mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Om aan $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ te voldoen: $t = 0$ invullen:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Deze vectorvergelijking geeft $c_1 = 2, \; c_2 = 3$, en daarmee het **eindantwoord**

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{x}_1(t) + 3\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_p(t) = ... = \begin{bmatrix} -2\cos te^{-t} - 3\sin te^{-t} + e^{2t} \\ \cos te^{-t} + 8\sin te^{-t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

(Bewerkelijk) alternatief om $\mathbf{x}_p$ te vinden: variatie van constanten.

Fundamentaalmatrix: $\quad \Psi(t) = \begin{bmatrix} -\cos t & -\sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{-t}$

met inverse $\;\ldots\;$ $\Psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t & \sin t \\ -2\cos t - \sin t & -\cos t \end{bmatrix} e^{t}$.

$\mathbf{x}_p(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$ geeft $\;\ldots\;$ $\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) = \ldots = \begin{bmatrix} \sin t - 3\cos t \\ -3\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{3t} \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{3t}$, en dan uiteindelijk

$\mathbf{x}_p(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -\cos t & -\sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} e^{3t} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t}$,
precies dezelfde als via 'slim stellen'.

4a Nogal eenvoudig: $\dfrac{dy}{dt} = x\,y = 0$ als $x = 0$ of als $y = 0$.
Dit invullen in de uitdrukking voor $\dfrac{dx}{dt}$ geeft de twee stationaire punten $(-1, 0)$ en $(0, 2)$

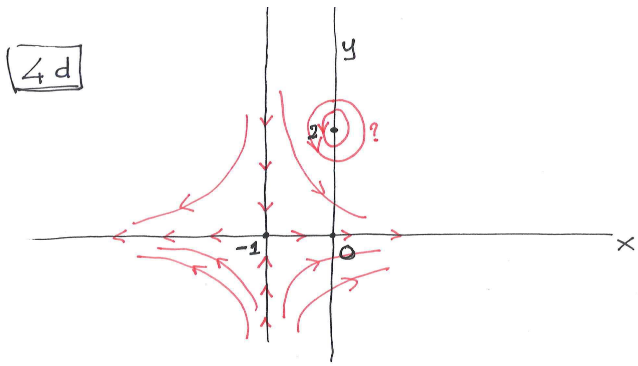
4b Als $x = -1$, dan is aan de eerste vergelijking voldaan, en $y(t)$ wordt dan bepaald door $y'(t) = (-1)y(t)$, wat in dit geval nog heel gemakkelijk gaat ook. Dit geeft een oplossingskromme waarbij x constant is.
Analoog is voor $y = 0$ automatisch voldaan aan de tweede d.v., en daaruit volgt een oplossing $\mathbf{x}(t) = (x(t), 0)$ waarbij y constant is.

4c De matrix voor de linearisering in een stationair punt: $\quad J(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - y & -(x+1) \\ y & x \end{bmatrix}$.

In het punt (0,2): $\quad J(0, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, een matrix met karakteristiek polynoom $\lambda^2 + 2$, dus met eigenwaarden $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, wat duidt op een *centrum*. Voor het niet-gelineariseerde stelsel is (0,2) dan een centrum of een spiraalpunt.

In het punt $(-1,0)$: $J(-1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, een (diagonaal!) matrix met eigenwaarden $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Dat zijn reële eigenwaarden met verschillend teken, dus het punt $(-1,0)$ is een *zadelpunt*, ook voor het niet-gelineariseerde stelsel.

4d



NB Het is niet helemaal zeker dat (0,2) een centrum is.

4e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{xy}{(1+x)(2-y)} \Leftrightarrow \frac{(2-y)}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1+x)} \Leftrightarrow \frac{(2-y)}{y}\,dy = \frac{x}{(1+x)}\,dx$$

'Uitintegreren'

$$\int \frac{(2-y)}{y}\,dy = \int \frac{2}{y} - 1\,dy = \int \frac{x}{(1+x)}\,dx = \int 1 - \frac{1}{(1+x)}\,dx \Leftrightarrow 2\ln|y| - y = x - \ln|1+x| + C$$

(Bij de eerste stap is gedeeld door y, waardoor de oplossing $y = 0$ 'verloren' is gegaan. Die zou er dus voor de volledigheid ook nog bij moeten.)

5 Het gebruikelijke rataplan:
stel $u(x,t) = X(x)Y(y)$, vervolgens: scheid variabelen, dat geeft

$$4\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \text{ (constant)} \rightarrow \begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ Y'' - 4\sigma Y = 0 \end{cases}$$

Randwaarden $u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$, $u(4,y) = X(4)Y(y) = 0$ impliceren $X(0) = X(4) = 0$.
Apart bekijken: $\sigma = \rho^2 > 0$, $\sigma = 0$, $\sigma = -\rho^2 < 0$, ...

$$\left\{\begin{array}{l} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = 0, \ \ X(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{ voor } \sigma = -\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 : \ \ X_n(x) = B_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right), \text{ voor } n = 1, 2, ...$$

Voor de genoemde σ:

$$Y'' - 4\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 Y = 0, \ Y(0) = 0 \ \Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow \quad Y_n(y) = A_n\left[e^{\frac{n\pi}{2}y} - e^{-\frac{n\pi}{2}y}\right] \quad \text{of: } Y_n(y) = A_n \sinh\left(\tfrac{n\pi}{2}y\right)$$

All in all

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right)\sinh\left(\tfrac{n\pi}{2}y\right)$$

$u(x, 2) = \sin(\frac{1}{2}\pi x)$ geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right) \sinh\left(\tfrac{n\pi}{2}2\right) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi x)$$

Gelijkheid ontstaat als $C_2 \sinh\left(\frac{2\pi}{2}2\right) = 1,$ en alle andere C_n zijn gelijk aan 0.

Het eindantwoord: $u(x, y) = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{4}x\right)\sinh(\pi y)}{\sinh(2\pi)} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\sinh(\pi y)}{\sinh(2\pi)}.$

NB dit is een steno uitwerking. Op het tentamen moet u de stappen volledig uitwerken.