Analyse 4 Wi1300TA, 2 juli 2013.

1. Een parametrisering van C: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $|\underline{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1+\sin^2 t}$

$$\int_C \sqrt{1+y^2}\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+y^2}\, |\underline{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin^2 t}\sqrt{1+\sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t\right) dt = 2\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 3\pi$$

2. $\underline{F} = \begin{pmatrix} ye^x + y^2 \\ e^x + 2xy + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$

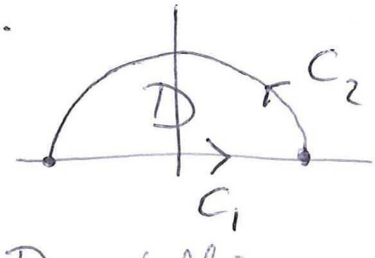
a) $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 2y + 2$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ dus $\underline{F}$ is niet conservatief.

b) Parametriseer C_1: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, t van -1 naar 1.

$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{-1}^{1} \underline{F} \cdot \underline{r}'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t + 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

c).



$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$

C_1 en C_2 vormen de rand van D.

De stelling van Green zegt nu:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1 \cup C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

waarbij de rand van D (dus $C_1 \cup C_2$) positief georiënteerd is (tegen de klok in).

Dus $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$, de oriëntatie klopt.

2c) Vervolg

In (b) vonden we $\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$.

Dus $\int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 2\, dA$

$= 2\, A(D) = \pi$.

3. a) $\underline{G}$ is conservatief want g is een potentiaal functie van $\underline{G}$.

b) $\underline{r}(0) = \langle -1, 0, 0 \rangle$

$\underline{r}(2) = \langle 3, \sqrt{2}, 2 \rangle$.

$$\int_K \underline{G} \cdot d\underline{r} = \int_K \nabla g \cdot d\underline{r} = g(\underline{r}(2)) - g(\underline{r}(0))$$

$$= g(3, \sqrt{2}, 2) - g(-1, 0, 0) = \ln 16 - \ln 2 = \ln 8$$

4. a) Ligt $(7,2,5)$ op S?

Dan moet gelden $\begin{cases} u + 3 = 7 \rightarrow u = 4 \\ v - 1 = 2 \rightarrow v = 3 \\ \sqrt{u^2+v^2} = 5 \quad \text{klopt met } u = 4 \text{ en } v = 3. \end{cases}$

$\underline{r}(4,3) = \langle 7, 2, 5 \rangle$ dus $(7,2,5)$ ligt op S.

b) $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ is een normaalvector op S.

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Met $u = 4$ en $v = 3$ vinden we een normaalvector op het raakvlak aan S in $(7,2,5)$:

$\underline{n} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$, een vergelijking voor het raakvlak:

$$-\frac{4}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(y-2) + (z-5) = 0$$

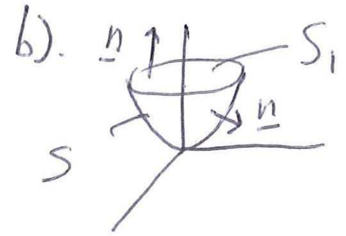
4.c). $\iint_S dS = \iint_H |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \, dA$ met $H = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 5, \; 0 \leq v \leq 5\}$.

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\iint_H \sqrt{2} \, dA = \sqrt{2} \, A(H) = 25\sqrt{2}$$

5. a). $\text{curl } \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3xz \\ -yz \\ -z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{div } \underline{F} = 3z - z - 2z = 0.$

b). 

We sluiten S af met S_1 (deksel)

$S_1 = \{(x,y,z) \mid z = 1, \; x^2+y^2 \leq 1\}$

met eenheidsnormaal $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

S en S_1 vormen samen een georiënteerd (naar buiten) gesloten oppervlak, de "rand" van een gebied E

$E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 1, \; x^2+y^2 \leq 1\}$.

De divergentiestelling geeft nu:

$$\iint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} + \iint_{S_1} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \iiint_E \text{div } \underline{F} \, dV.$$

aangezien $\text{div } \underline{F} = 0$ volgt nu:

$$\iint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = -\iint_{S_1} \underline{F} \cdot d\underline{S} = -\iint_{S_1} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = -\iint_{S_1} \begin{pmatrix} 3x \\ -y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS$$

$$= -\iint_{S_1} (-1) \, dS = A(S_1) = \pi$$

* * *