Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse voor Technische Aardwetenschappen
deel 4 wi1300TA, Dinsdag 23 juni 2009, 9.00-11.00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

(5) 1. De kromme K is het deel van de parabool $y = x^2$ met $0 \leq x \leq 1$.
Op K is een massabelegging aangebracht met dichtheid $\rho(x, y) = \sqrt{1 + 4y}$.

(a) Bereken de massa van K.

(b) Bereken de x-coördinaat van het massamiddelpunt van K.

(7) 2. Het vectorveld $\mathbf{F}$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz - z \sin x)\,\mathbf{i} + (xz + 1)\,\mathbf{j} + (xy + \cos x + \cos z)\,\mathbf{k}.$$

Verder is gegeven de kromme C met parametrisering:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 \arctan t,\ 1 - t,\ (2 - t^2)\pi \rangle,\ 0 \leq t \leq 1.$$

(a) Bereken $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

(b) Ga na of $\mathbf{F}$ conservatief is en bepaal zo mogelijk een potentiaalfunctie voor $\mathbf{F}$.

(c) Bepaal $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(8) 3. Gegeven is het oppervlak S, geparametriseerd door:
$\mathbf{r}(u, v) = \langle u + 3,\ v - 1,\ \sqrt{4 - u^2 - v^2}\,\rangle,\ \ u^2 + v^2 \leq 3.$

(a) i. Laat zien dat S een deel van een bol is.
ii. Laat zien dat het punt $(2, 0, \sqrt{2})$ op S ligt.

(b) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S in $(2, 0, \sqrt{2})$.

(c) Bepaal de oppervlakte van S.

(7) 4. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y^2 e^z, yz(2x + 1), 1 - xz^2 \rangle$ en het georiënteerde oppervlak S, gegeven door: $z = x^2 + y^2$ met $z \leq 4$, de eenheidsnormaalvector $\mathbf{n}$ heeft een negatief 3^e kental.

(a) Schets S.

(b) Bereken $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

(Hint: Kies een geschikt oppervlak S_1 zó dat S en S_1 samen een lichaam E omvatten en gebruik de divergentiestelling.)

Antwoorden:

1. (a) $\frac{7}{3}$.
   (b) $\frac{9}{14}$.
2. (a) $\mathbf{0}$.
   (b) ja, $f(x, y, z) = xyz + z\cos x + y + \sin z$.
   (c) $-2\pi - 1$.
3. (a) -
   (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2) + \frac{1}{\sqrt{2}}y + (z - \sqrt{2}) = 0$.
   (c) 4π.
4. (a) -
   (b) $\frac{52}{3}\pi$.