Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse voor Technische Aardwetenschappen
deel 4 wi1231TA, Woensdag 16 juni 2004, 9:00-11:00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

1. Een draad met constante dichtheid ρ heeft de vorm van de spiraal C gegeven door:

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,\ \ 0 \le t \le \pi.$$

(2) (a) Bepaal de massa van de draad.

(4) (b) Bepaal de coördinaten van het massamiddelpunt.

(4) 2. De gesloten kromme C bestaat uit C_1, de parabool $y = x^2$ van $(-1, 1)$ naar $(2, 4)$ en het lijnstuk C_2 van $(2, 4)$ naar $(-1, 1)$.

Het vectorveld F is gegeven door: $\mathbf{F}(x, y) = -xy\,\mathbf{i} + (x + \arctan y)\,\mathbf{j}$.

Bepaal $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (aanwijzing: gebruik de stelling van Green).

3. Het vectorveld $\mathbf{G}$ wordt gegeven door:
$\mathbf{G}(x, y, z) = z\mathbf{i} + (\sin z)\mathbf{j} + (x + y\cos z + 1)\mathbf{k}$.

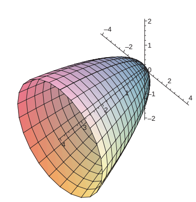
(3) (a) Bereken $\operatorname{curl}\mathbf{G}$ en $\operatorname{div}\mathbf{G}$.

(3) (b) Bepaal zo mogelijk een functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zodat $\mathbf{G} = \nabla g$.

(2) (c) De kromme K wordt gegeven door de parametervoorstelling:
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{1 + t}\mathbf{j} + (\arctan t)\mathbf{k},\ \ 0 \le t \le 1$.
Bereken $\displaystyle\int_K \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.

(3) (d) S is het oppervlak van de kubus met hoekpunten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ en $(0, 1, 1)$. Bereken de flux van $\mathbf{G}$ door S (met naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector).

4. Gegeven is het georiënteerde oppervlak S met parametervoorstelling
$\mathbf{r}(u, t) = u^2\mathbf{i} + 2u\sin(t)\mathbf{j} + u\cos(t)\mathbf{k}$ met $0 \le u \le 2$ en $0 \le t \le 2\pi$.
De eenheidsnormaalvector $\mathbf{n}$ heeft een negatief eerste kental.



(3) (a) Toon aan dat $(1, 2, 0)$ op S ligt en bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S door $(1, 2, 0)$.

(3) (b) Bereken de oppervlakte-integraal van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ over S: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Antwoorden:

1. (a) $\rho\pi\sqrt{5}$.
   (b) $(0, \frac{4}{\pi}, \frac{\pi}{2})$.
2. $\frac{27}{4}$.
3. (a) $\mathbf{0}$, $-y\ \sin z$.
   (b) $xz + y\ \sin z + z$.
   (c) $\frac{\pi}{2} + 1$.
   (d) $\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$.
4. (a) $x - y + 1 = 0$.
   (b) 16π.