Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse voor Technische Aardwetenschappen
deel 4 wi1231TA, Woensdag 27 augustus 2003, 9:00-11:00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

1. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = -xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ op $\mathbb{R}^3$ en de kromme K met parametervoorstelling $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$.

(1) (a) Ga na of $\mathbf{F}$ conservatief is.

(3) (b) Bepaal $\displaystyle\int_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

2. Gegeven is op $\mathbb{R}^2$ het vectorveld $\mathbf{G}(x,y) = \nabla g(x,y)$ met $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en de vlakke kromme C met parametervoorstelling $\mathbf{r}(t) = (t - \sqrt{t} + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 3t)\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 4$.

(1) (a) Schets $\mathbf{G}$.

(2) (b) Bepaal $\displaystyle\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$.

(4) 3. De gesloten kromme K bestaat uit drie lijnstukken: het lijnstuk van $(0,0)$ naar (1,1), het lijnstuk van $(1,1)$ naar (1,0) en het lijnstuk van $(1,0)$ naar (0,0) (georiënteerd volgens de wijzers van de klok).
Bereken $\displaystyle\int_K (yx^2 - e^{\sin x})dx + (x^3 + \sqrt{y^4+1})dy$.

(4) 4. Gegeven is het oppervlak S met parametervoorstelling $\mathbf{r}(r,t) = r^2\mathbf{i} + r\cos t\mathbf{j} + r\sin t\mathbf{k}$ met $r \ge 0$ en $0 \le t \le 2\pi$.
Toon aan dat $(2,1,1)$ op S ligt en geef een vergelijking van het raakvlak aan S door $(2,1,1)$.

(6) 5. Gegeven is het deel van de cilinder $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2,\ 0 \le z \le 3\}$. Bereken de flux van het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + \sin(y^2))\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$$

door S (met van de $z-$as af gerichte eenheidsnormaalvestor).
Hint: Sluit S af en gebruik de divergentiestelling.

(6) 6. S is het gedeelte van het boloppervlak $x^2+y^2+z^2 = 4$ met $z \ge 1$.
Op S is een massabelegging aangebracht met dichtheid $\rho(x,y,z) = z$.
Bereken het traagheidsmoment t.o.v. de $z-$as:

$$\iint_S (x^2+y^2)\,\rho\,dS.$$

Antwoorden:

1. niet conservatief, $\frac{3}{4}$.
2. 4.
3. $-\frac{1}{2}$
4. $(x-2)-2(y-1)-2(z-1)=0$.
5. 12π.
6. 9π.