Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse voor Technische Aardwetenschappen
deel 4 WI1 231TA, Maandag 24 juni 2002, 9:00-11:00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

1. Het oppervlak S wordt geparametriseerd door
$\mathbf{r}(u,v) = \langle ve^{u+1}, u^2+v^2, uv+4v \rangle$, $u, v \in \mathbb{R}$.
Nemen we $u = -1$ in de parametrisering van S dan vinden we een parametrisering van een kromme die we C_1 noemen. Nemen we $v = 2$ in de parametrisering van S dan vinden we een parametrisering van een kromme die we C_2 noemen.

(2) (a) Toon aan dat C_1 en C_2 elkaar loodrecht snijden in het punt $(2,5,6)$.

(3) (b) Bepaal een vergelijking voor het raakvlak aan S in het punt $(2,5,6)$.

2. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.
C is het lijnstuk met beginpunt $(0,0)$ en eindpunt (a,b).

(2) (a) Schets het vectorveld.

(1) (b) Ga na of $\mathbf{F}$ conservatief is.

(3) (c) Laat zien dat $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

(3) (d) Beschouw een simpel gesloten, georiënteerde, kromme K in het $(x,y)-vlak$. Wat is het verband tussen $\displaystyle\int_K \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ en de oppervlakte van het door K omsloten gebied?
Aanwijzing: gebruik de stelling van Green.

3. Het vectorveld $\mathbf{G}$ wordt gegeven door:
$\mathbf{G}(x,y,z) = z\mathbf{i} + (\sin z)\mathbf{j} + (x + y\cos z + 1)\mathbf{k}$.

(2) (a) Bereken curl $\mathbf{G}$.

(3) (b) Bepaal zo mogelijk een functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zodat $\mathbf{G} = \nabla g$.

(2) (c) De kromme K wordt gegeven door de parametervoorstelling:
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{1+t}\mathbf{j} + (\arctan t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.
Bereken $\displaystyle\int_K \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$

4. (2) (a) Formuleer, zo volledig mogelijk, de divergentiestelling.

(5) (b) Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x+z, \arctan(xz) - y, x^2+y^2 \rangle$ en het georiënteerde oppervlak S, gegeven door: $x^2+y^2+z^2 = 4$ met $z \le 1$ en van de oorsprong af gerichte eenheidsnormaalvector $\mathbf{n}$.
Bereken $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, de flux van $\mathbf{F}$ door S.
(Hint: Kies een geschikt oppervlak S_1 zó dat S en S_1 samen een lichaam E omvatten en gebruik de divergentiestelling.)

Antwoorden:

1. $14(x_1 - 2) + 4(x_2 - 5) - 10(x_3 - 6) = 0$.
2. $\mathbf{F}$ is niet conservatief.
   $\displaystyle\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ is gelijk aan 2 keer de oppervlakte van het door K omsloten gebied.
3. $\mathbf{0}$, $g(x, y, z) = zx + y \sin z + z$, $\frac{\pi}{2} + 1$.
4. $-\frac{9}{2}\pi$.