Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse, deel 3, WI1300TA
vrijdag 20 april 2012, 9:00-11:00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

1. De functie f is voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x+y \neq 0$ gegeven door $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

(2) (a) Teken de hoogtelijnen van f met hoogte 0 en 1 (gebruik zonodig je GR).

(1) (b) Ga na of $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + x + y^2$.

(3) (a) Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(1,2)$ in de richting van de vector $\langle 3, -4 \rangle$.

(3) (b) Bepaal de stationaire punten (critical points) van f en ga van elk van deze punten na of het een lokaal minimum, een lokaal maximum of een zadelpunt betreft.

(2) (c) Bepaal het absolute minimum en het absolute maximum van f op het gebied $D = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bedenk dat op de rand van D geldt: $y^2 = 1 - x^2$.

(4) 3. Bereken: $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{y^3+1}\, dy\, dx$.

Aanwijzing: misschien helpt het als u de integratievolgorde verandert.

(4) 4. D is het gebied binnen de ellips met vergelijking $(x-2)^2 + (2y-3)^2 \leq 1$.

Bereken $\displaystyle\iint_D (x+4y)\, dA$. Aanwijzing: Pas de transformatie $\begin{cases} x-2=u \\ 2y-3=v \end{cases}$ toe.

(3) 5. H is het viervlak met hoekunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,3)$.

Schrijf $\displaystyle\iiint_H f(x,y,z)\, dV$ als herhaalde integraal, dus als $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

(een andere integratievolgorde mag ook).

(5) 6. Het lichaam E ligt binnen de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en boven het vlak met vergelijking $z = 1$.

Bereken de massa van E als de massadichtheid K gegeven is door

$K(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Aanwijzing: gebruik bolcoördinaten.

****