Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Tentamen Analyse, deel 3, WI1 230TA
maandag 25 augustus 2008, 9:00-11:00 uur.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie. Het gebruik van een "VWO-rekenmachine" en de uitgereikte tabel is toegestaan.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD

---

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = y^2 - xy^2 + x^2$.
   - (3) (a) Bepaal de richtingsafgeleide van f in $(2, -1)$ in de richting van de vector $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.
   - (1) (b) Bepaal de linearisering van f in $(2, -1)$.
   - (2) (c) Laat zien dat $(0, 0)$, $(1, -\sqrt{2})$ en $(1, \sqrt{2})$ de enige stationaire punten (critical points) van f zijn.
   - (3) (d) Ga na of f in de in (c) genoemde punten een minimum, een maximum of een zadelpunt heeft.

(4) 2. D is het gebied in het eerste kwadrant met $y \le x \le 4$ en $0 \le y \le \frac{1}{x}$.
   - (a) Schets D.
   - (b) Bereken $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x}\, dA$.

(4) 3. $G = \{(x, y) |\ 0 \le x - 2y \le 1,\ 1 \le x + 2y \le 2\}$.
   Bereken $\displaystyle\iint_G (x - 2y)e^{x+2y}\, dA$.
   Aanwijzing: pas de transformatie $x - 2y = u,\ x + 2y = v$ toe en vergeet de Jacobiaan niet.

(5) 4. $E = \{(x, y, z) |\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ x \ge 0\}$, de massadichtheid $\rho(x, y, z)$ is constant.
   - (a) Bereken het volume van E.
   - (b) Bereken de x-coördinaat van het massamiddelpunt.

(5) 5. H is het lichaam binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, boven de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Dus $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
   Bereken $\displaystyle\iiint_H z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$.
   Aangeraden wordt gebruik te maken van bolcoördinaten.

Antwoorden:

1. (a) $\frac{17}{5}$
   (b) $L(x, y) = 3 + 3(x - 2) + 2(y + 1)$
   (c) minimum in (0,0), verder zadelpunten.

2. (a) -
   (b) $\frac{9}{14}$

3. $\frac{1}{8}(e^2 - e)$

4. (a) 4π
   (b) $\frac{32}{\sqrt{15\pi}}$

5. $\frac{64}{9}(1 - \frac{1}{4}\sqrt{2})\pi$.