S. R. Thisoensingh.
A. R. Kasiemkhan.

$\boxed{\S 11.1}$: Rijen

Stelling: Als een rij a_n monotoon ① en begrensd ② is $\Rightarrow$ Convergeert de Rij!

① Een rij is monotoon als de rij of alleen stijgend is of alleen dalend is!

② Een rij is ~~stijgend~~ begrensd als de rij in geval stijgend een bovengrens heeft of in geval dalend een ondergrens heeft!

Def: Indien de rij convergeert, bestaat er een limiet!

$\boxed{\S 11.2}$: Reeksen

• De meetkundige reeks: $\left(a + ar + ar^2 + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} ar^n\right)$

Algemene vorm: ar^n, waarbij a de 1e term is en r de rede is!

- Als $|r| < 1$ (dus $-1 < r < 1$) $\Rightarrow$ Convergeert de reeks naar de som: $\frac{a}{1-r}$!
- " $|r| \geq 1$ (dus $r \geq 1$ en $r \leq -1$) $\Rightarrow$ divergeert de reeks!

voorbeeldopgave 1:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$; dus $r = \frac{1}{3}$ en $a = 1^e$ term $= \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

$|r| < 1$ dus Convergent met $\frac{1}{1 - 1/3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$; dus $r = \frac{1}{2}$ en $a = 1^e$ term $= \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$|r| < 1$ dus Convergent met $\frac{1/2}{1 - 1/2} = \underline{\underline{1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$; $r = 2 \Leftrightarrow |r| \geq 1$ dus de reeks divergeert!

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2)^n} - \frac{1}{2^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{①} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{②}$: 2 afzonderlijke meetkundige reeksen.

①: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1/2}{1 + 1/2} = -\frac{1}{3}$

②: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$

Dus: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2^n} = -\frac{4}{3}$ (Convergent)!

- De Harmonische reeks : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: Divergent
- De p-reeks : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $<$ Divergent als $p \leq 1$ / Convergent als $p > 1$
- De alternerende reeks (§11.5) : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot b_n$

Deze reeks is convergent als : ① $b_n > 0$
② $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$
③ $\{b_n\}$ dalend is

Voorbeeldopgave

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ dus $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

① $b_n > 0$; want een wortel > 0
② $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$
③ De afgeleide moet negatief zijn
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \to$ negatief, dus dalend

b_n voldoet aan alle drie voorwaarden dus de gehele reeks convergent

$\boxed{\S 11.3}$: Integraal kenmerk

Stelling : Als een integraal divergeert $\Rightarrow$ divergeert de reeks ook!
" " " convergeert $\Rightarrow$ convergeert " " "

Stelling : $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$; Geen conclusie te trekken

Voorbeeldopgave :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ dus $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2\infty} = 0$; geen conclusie te trekken!

Andere techniek : Gebruik Integraal kenmerk :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = \left[\tfrac{1}{2} \ln x\right]_1^{\infty} = \lim_{p \to \infty} \tfrac{1}{2} \ln p - \tfrac{1}{2} \ln 1$$
$$= \tfrac{1}{2} \ln \infty - 0$$
$$= \infty \text{ ; Divergent}$$

De Integraal Divergeert, dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergeert ook!

§11.6 : Ratio Test

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \begin{cases} L<1 & : \text{Conv.} \\ L=1 & : \text{Geen conclusie} \\ L>1 & : \text{Div.} \end{cases}$$

N.B: Als a_n lijkt o.l.d. p-reeks ⇒ werkt deze methode niet!
Als a_n lijkt o.l.d. meetkundige reeks ⇒ " " " wel!

Voorbeeld Opgave 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n\cdot 2^1}{2^n}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|2\cdot\frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\infty} = 0$$; dus $L=0 \Rightarrow a_n$ convergent!

Voorbeeld Opgave 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)+1}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3\right|$$

delen door de hoogste macht! ($\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$)

$= 1$; dus $L=1$
Geen Conclusie!

§ 11.8 Machtreeksen

Algemene vorm: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$

Los op m.b.v. Ratio Test! (Convergentie gebied nagaan).

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}\,X^{n+1}}{C_n\,X^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| |X| = L\,|X|$$

→ convergentie straal

L:
- $L=0$: Convergent voor iedere $x \in \mathbb{R}$: $R=\infty$
- $L \in \mathbb{R}^+$: " " $|X| < \frac{1}{L}$: $-\frac{1}{L} < R < \frac{1}{L}$
- $L=\infty$: " " $X=0$: $R=\frac{1}{\infty}=0$

* **voorbeeld 1**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (X-2)^n}{(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\,(x-2)^{n+1}}{(n+1+1)} \cdot \frac{(n+1)}{2^n (x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(x-2)^{n+1}}{(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n-1}\cdot 2^n \cdot 2^{n+1}}{2^{n-1}\cdot 2^n \cdots} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\text{delen door hoogste macht}} \cdot \frac{(x-2)^{n-1}\cdot(x-2)^n(x-2)^{n+1}}{(x-2)^{n-1}(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|2 \cdot 1 \cdot x-2\right| = \lim_{n\to\infty}\left|2\,(x-2)\right|$$

$$= \underbrace{2}_{L}\,|X-2|$$

$L=2$; ($\in \mathbb{R}^+$) dus $-\frac{1}{2} < R < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < X-2 < \frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} < X < 2\frac{1}{2}$

Randen:

- $x = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1/2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; alternerend (convergent)
- $x = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(1/2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$; divergent (lijkt op de harmonische)

Dus Convergentie gebied: $1\frac{1}{2} \le X < 2\frac{1}{2}$

<u>Voorbeeld 2</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$$

Dus Convergent voor $x \in \mathbb{R}$

§ 11.9 : Functies i/d vorm van machten (Reeksen)

Er geldt ook dat diff. en integreren van machtreeksen toegestaan is, bij constant gehouden R!

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad ; \text{ conv. voor } |x| < 1$$

(a) bepaal de bijbehorende machtreeks van $\frac{1}{1+x}$!
we weten $\frac{1}{1-x} \triangleq x^n$,

dus $\frac{1}{1+x} \triangleq (-x)^n = (-1)^n x^n$

dus $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

(b) bepaal de bijbehorende machtreeks van $\frac{1}{1+x^2}$!
we weten: $\frac{1}{1+x} \triangleq (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1+x^2} \triangleq (-1)^n x^{2n}$

dus $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

(c) bepaal de bijbehorende machtreeks van $\arctan x$!
we weten: $\frac{1}{1+x^2} \triangleq (-1)^n x^{2n}$

Integreren aan beide kanten geeft: $\arctan x \triangleq \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Dus: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

§11.10: Taylorreeksen en Polynomen

- Taylor Polynoom: $T_n(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

  NB: $0! = 1$
  $1! = 1$

- Taylorreeks: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

Stappen als gevraagd wordt: Bepaal de n^{de} orde graadspolynoom van $f(x)$ in punt $x=a$!

1e stap: Bepaal $f'(x), f''(x), f'''(x) \dots f^n(x)$!
2e stap: Bepaal $f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots f^n(a)$!
3e stap: Substitueren in Taylorpolynoom vergelijking!

} afh. vld orde weet je tot hoever te differentiëren!

- Voorbeeld opgave:
  Bepaal 3de graadspolynoom $T_3(x)$ rond $x=4$ van $f(x)=\sqrt{x}$!

1e stap:

$f(x) = \sqrt{x}$ | $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

2e stap:

$f(4) = 2$ | $f''(4) = -\frac{1}{32}$
$f'(4) = 1/4$ | $f'''(4) = \frac{3}{256}$

3e stap:

$$T_3(x) = \frac{2}{0!} + \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-4)^1 - \frac{1/32}{2!}(x-4)^2 + \frac{3/256}{3!}(x-4)^3 \iff$$

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

§11.11: Toepassen Taylor Polynoom

Dit zal tijdens de laatste Serie (tijdens het oefenen van tentamen opgaven uitgewerkt worden)