naam Samenvatting

klas 11.1 t/m 11.6

vak

datum

resultaat

rijen + reeksen:

① $a_n = r^n$; $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$; Conv
$|r| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; Div

bovengrens + ondergrens (M) + (m)
$a_n \leq M$ $a_n \geq m$ } a_n is begrensd als het een M en m heeft.

Monotoon = alleen stijgend of alleen dalend
Iedere monotone begrensde rij = conv } direct zie schrift. § 11.1

11.2

① Harmonische reeks : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ div

④ Een alternerende reeks (11.5)
$a_n = (-1)^{n+1} b_n$ (als)
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
- $\{b_n\}$ = dalend
- $b_n > 0$ (alternerend)

$\Rightarrow \sum a_n$ = conv

② Meetkundige reeks : $|r|$ = factor
↳ r^n
$|r| < 1 \Rightarrow$ de reeks conv met $\frac{a}{1-r}$
$a = 1^e$ term

$|r| > 1 \Rightarrow$ de reeks divergent

③ P-reeks : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ voor $p > 1 \Rightarrow$ reeks conv / voor $p \leq 1 \Rightarrow$ reeks div

Reeks = somrij van rij.

Alg
- als de lim vd rij $\neq 0$ of $\pm\infty$ is, dan divergeert de reeks
- als de lim vd rij $= 0$; dan is er geen conclusie. Er moet dan of met een integraal vergeleken worden, of er moet limietkenmerk toegepast worden, of er moet gebruik gemaakt worden van d'Alembert

dus: • Integraal vergelijken (11.3)
- als de lim v/d integraal $\pm\infty$ is, dan is de reeks divergent
- als de lim v/d integraal conv is, dan is de reeks convergent.

• Limiet kenmerk (11.4)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
- $L = 0$: als a_n div $\Rightarrow b_n$ div; als b_n conv $\Rightarrow a_n$ conv
- $L > 0$: a_n conv $\Rightarrow b_n$ conv; b_n conv $\Rightarrow a_n$ conv
- $L \to \infty$: a_n conv $\Rightarrow b_n$ conv; b_n div $\Rightarrow a_n$ div

a_n = de gegeven Reeks
b_n = de gekozen reeks om te vergelijken

vb1 $\lim a_n = \frac{1}{n^2 - n}$; kies $b_n = \frac{1}{n^2}$ (noemer = kwad, T = c)

vb2 $a_n = \frac{n+1}{n^3}$; kies $b_n = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ (noemer = 3^e, T = 1^e)

dus als kies $b_n = \frac{\text{macht T } a_n}{\text{macht N } a_n}$

• d'Alembert : Als $\sum |a_n|$ = conv $\Rightarrow \sum a_n$ = conv
(11.6) als $\sum a_n$ absoluut conv is $\Rightarrow \sum a_n$ = conv
↓
Sterk conv

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$
- $L < 1$; reeks = conv (absoluut)
- $L > 1$; reeks = div
- $L = 1$; geen conclusie (dan moet je limietkenmerk of Integraalverg toepassen)

N.B: als $\sum a_n$ lijkt op de p-reeks, dan is d'Alembert niet v toepassing | maar als het lijkt o/e meetkundige reeks gaat het wel goed.

Samenvatting

17.8 machtreeksen

$\sum c_n x^n$

Altijd oplossen m.b.v. quotiëntenregel
met als antwoord! $= L|x|$

- voor $L=\infty$; $R=\frac{1}{\infty}=0$ dus conv voor $x=0$
- voor $L=0$; $R=\frac{1}{0}=\infty$ dus conv voor $x\in\mathbb{R}$
- voor $L=\mathbb{R}^+$; $R=\pm\frac{1}{\mathbb{R}^+}$ voor x conv tussen $-\frac{1}{\mathbb{R}^+}$ en $\frac{1}{\mathbb{R}^+}$

$$-\frac{1}{\mathbb{R}^+} < x < \frac{1}{\mathbb{R}^+}$$

en de grenzen ook nagaan.

vb $\sum c_n x_n = L|x|$

$$\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}$$

11.9 Diff + Integreren van $\boxed{M}$ (machtreeksen) is toegestaan bij constant gehouden R.

vb1: $\sum X^n = \frac{1}{1-X}$

dan bepaal machtreeks $\frac{1}{1+X} = \sum (-X)^n = \sum (-1)^n (X)^n$

vb2: $\sum X^n = \frac{1}{1-X}$

dan bepaal $\frac{1}{1+X^2} = \sum$???

$$\frac{1}{1-x} \triangleq X^n$$

$$\frac{1}{1+x} \triangleq (-1)^n X^n$$

$$\frac{1}{1+X^2} \triangleq (-1)^n X^{2n}$$

vb3: bep arctan x

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2} \triangleq (-1)^n X^{2n} \right) \int$$

$$\arctan x \triangleq \int (-1)^n X^{2n} = \frac{(-1)^n X^{2n+1}}{2n+1}$$

vb4:

11.10 : Taylorreeksen Samenvatting

- Taylorpolynoom: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$

$$\dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Taylorreeks: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

meestal gevraagd: bep. taylorreeks v/d bep. fn $f(x)$ in $x=a$.

① bepaal $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

② Vervolgens bepaal de algemene formule:

$f^n(x)$, a.d.v $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

③ bepaal $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$

④ Vervolgens bepaal de a in de algemene formule:

$$f^n(a) = \dots$$

⑤ Substitueer $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ en $f^n(a)$ in de taylorpolynoom.

⑥ Subst $f^n(a)$ uit ④ in $\sum \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

en dan heb je $\sum$ (machtreeks) van de geg. $f(x)$ en is de conv onderzoek m.b.v quotiëntregel te onderzoeken!!!

Samenvatting (12.1, 12.2, 12.3)

$a\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$\bar{a}-\bar{b} = \bar{a}+(-\bar{b})$

$\alpha\bar{b} = \begin{pmatrix}\alpha b_1\\\alpha b_2\end{pmatrix}$

afstand $\bar{a}$ en b van $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$d(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{b}-\bar{a}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Bol: $M\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}$

$(x-m_1)^2+(y-m_2)^2+(z-m_3)^2 = R^2$

Inwendig prod:
$(a \perp b)$ = Inprod = 0

$\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}}{|a|\cdot|B|}$

$\cos\gamma = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{B}}{|a|\cdot|B|}$ → kostallen / → lengte.

$a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2\cdot5^2\cdot6^2}} = \dfrac{|4+10+18|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}}$

- projectie 1: vector proj

$\boxed{\bar{p} = \alpha\,\bar{a} = \dfrac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{a}}\cdot\bar{a}}$ ☆

- projectie 2: Scalairproj

$\bar{p} = \dfrac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{a}}\cdot\bar{a} = \dfrac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|^2}\cdot\bar{a} = \dfrac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{|a|}\cdot\dfrac{\bar{a}}{|a|}$ → altijd 1

$\boxed{\bar{p} = \dfrac{\bar{b}\,\bar{a}}{|a|}}$ ☆

Samenvatting H. 13

- $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $r(t)$ is een vector met kentallen in $\mathbb{R}_3$

- $v(t)$ = de afgeleide van $r(t)$

  $v(t) = r'(t)$

- Booglengte : $(S(t)) \Leftrightarrow$ afgelegde weg

$$S(t) = \int_a^t |v(t)|\, dt$$

de booglengte is de integraal van de lengte van de kentallen van $v(t)$!!!

vb :

$y = \sqrt{x}$ $\quad$ • $\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\sqrt{x} = t$ en $y = t$
$x = t^2$

• $\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

• $|v(t)| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{4t^2 + 1}$
$= |2t + 1|$

$x = 0$;
$x = 2$; $\Big\}$ term $\quad S(t) = \int_0^2 2t + 1$

$= \left[\frac{2}{2} t^2 + t\right]_0^2$

$= [t^2 + t]_0^2$

$= 6 - 0$

$= 6$