Faculteit EWI, afdeling DIAM
Toets1 Lineaire Algebra (deel 2), wi1273TA
Donderdag 28 februari 2013, 9.45-10.30 uur

Naam:
Studienr:

- Bij de eerste 3 opgaven hoeft u alleen de antwoorden op dit vel in te vullen (u hoeft daarvan geen toelichting te geven). Bij opgave 4 dienen de drie onderdelen van een duidelijke argumentatie te zijn voorzien. Ook deze uitleg kunt u op dit opgavevel noteren. Schrijf duidelijk, zodat u niet door slordig schrift punten verliest.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan, dus ook geen rekenmachine.
- Normering: opgave 2 en 3 zijn elk 2 punten waard en de overige onderdelen (van opg. 1 en 4) elk 1 punt. Cijfer=score+1.

---

1. Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$.

a. Geef het bijbehorende stelsel normaalvergelijkingen.

Antwoord:

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix}$

b. Bepaal de kleinste kwadraten oplossing(en) van het gegeven stelsel lineaire vergelijkingen.

Antwoord:

(1) $x + y = 18/5$ of $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $t \in \mathbb{R}$

2. Gegeven is dat de vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ een kleinste kwadraten oplossing is van het stelsel lineaire vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$ waarbij $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (dit hoeft u niet na te gaan). Ontbind $\underline{b}$ in een vector $\underline{u} \in COL(A)$ en een vector $\underline{v}$ die loodrecht staat op alle vectoren in $COL(A)$.

(2)

Antwoord:

$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

z.o.z.

3. Los x op uit de vergelijking $\begin{vmatrix} 4 & x & 0 \\ x & 4 & x \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$

(2)

Antwoord: $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

4. Bewijs of weerleg de volgende 3 uitspraken (*bij dit vraagstuk dient bij elk onderdeel een volledige en sluitende argumentatie te worden gegeven*):

a. Er bestaat geen 2×2- matrix A zodanig dat $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Juist/Onjuist + argumentatie:

want $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = (\det A)^2 \geq 0$

(1)

en $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 < 0$

$\boxtimes$

b. Als C en B $n \times n-$ matrices zijn waarbij $|B| = 0$, dan geldt $|C + B| = |C|$.

Juist/Onjuist + argumentatie:

Tegenvoorbeeld:

(1)

Neem $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, dan $|B| = 0$ en $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

dan geldt:

$|C + B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ en $|C| = 1$, dus $|C + B| \neq |C|$

$\boxtimes$

c. De verzameling $V = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 \mid \text{de graad van } p(t) \text{ is gelijk aan } 3\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{P}_3$.

Juist/Onjuist + argumentatie:

(1)

Bijv $p(t) = t^3 + t \in V$ en $q(t) = -t^3 + 5t \in V$,

maar $p(t) + q(t) = 6t \notin V$ dus V is niet gesloten t.a.v. de optelling. Bijgevolg is V geen lineaire deelr. van $\mathbb{P}_3$

$\boxtimes$

extra 1

+

10