TU Delft

Faculteit EWI, afdeling DIAM

Toets 3 Lineaire Algebra (deel 2), wi1273TA

Donderdag 28 maart 2013, 9.45-10.30 uur

Naam:

Studienr:

- Bij de eerste 4 opgaven hoeft u alleen de antwoorden op dit vel in te vullen (u hoeft daarbij geen toelichting te geven). Bij opgave 5 dient u een duidelijke argumentatie te geven. Ook deze uitleg kunt u op dit opgavevel noteren. Schrijf duidelijk, zodat u niet door slordig schrift punten verliest.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan, dus ook geen rekenmachine.
- Normering:

Opg. 1	1	Opg. 2	1,5	Opg. 3	2	Opg. 4a	1,5	Opg. 5	2
						Opg. 4b	1		

Cijfer=score+1.

---

1. Bepaal de eigenwaarden van $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ als a, b en c zodanig zijn dat alle eigenwaarden van A verschillend zijn.

Antwoord: $\lambda = c$, $\lambda = a - b$ en $\lambda = a + b$

2. Bepaal β zodanig dat matrix $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 27 & 3 \\ 0 & 10 & \beta^2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ een 2-dimensionale eigenruimte heeft.

Antwoord: $\beta = \pm 9$

3. Gegeven is dat $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Geef een diagonalisatie (eigenwaarden decompositie) van C^{-1}, d.w.z. geef een inverteerbare 2×2 −matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $C^{-1} = PDP^{-1}$.

Antwoord:

$C^{-1} = PDP^{-1}$ met $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

z.o.z.

4. Gegeven is de vectorruimte $V = Span\{e^{2t}, e^{2t}\cos(t), e^{2t}\sin(t)\}$ met daarin basis $\mathcal{B} = \{e^{2t}, e^{2t}\cos(t), e^{2t}\sin(t)\}$ en de differentiaaloperator $\mathcal{T}: V \to V$ met voorschrift $\mathcal{T}(f(t)) = \dfrac{df(t)}{dt}$.

a. Bepaal $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}$, de representatiematrix van $\mathcal{T}$ t.o.v. basis $\mathcal{B}$.

Antwoord:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Bepaal $[\mathcal{T}(f(t))]_{\mathcal{C}}$ als $\mathcal{C} = \{e^{2t}, e^{2t}\cos(t) + e^{2t}\sin(t), e^{2t}\cos(t) - e^{2t}\sin(t)\}$ en

$$[f(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Antwoord:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

5. Bewijs of weerleg de volgende uitspraak (*bij dit vraagstuk dient een volledige en sluitende argumentatie te worden gegeven*):

Matrix $F = \begin{bmatrix} 3+\alpha & 0 \\ -7 & 3-\alpha \end{bmatrix}$ is diagonaliseerbaar voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$.

Juist/Onjuist + argumentatie:

Onjuist,

als $\alpha = 0$ dan $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ dus dan

is $\lambda = 3$ een eigenwaarde met alg. mult. 2

Echter $E_3 = Span\{e_2\}$ dus

$\dim(E_3) <$ alg. mult. van $\lambda = 3$.

Bijgevolg is F niet diagonaliseerbaar

$\boxtimes$