TU Delft

Faculteit EWI, afdeling DIAM
Toets3 Lineaire Algebra (deel1), wi1273TA
Donderdag 20 december 2012, 9.45-10.30 uur

Naam:
Studienr:

- Bij de eerste 4 opgaven hoeft u alleen de antwoorden op dit vel in te vullen (u hoeft daarvan geen toelichting te geven). Bij opgave 5 dienen beide onderdelen van een duidelijke argumentatie te zijn voorzien. Ook deze uitleg kunt u op dit opgavevel noteren. Schrijf duidelijk, zodat u niet door slordig schrift punten verliest.
- Normering: 1/ $1\frac{1}{2}$/ 1+$1\frac{1}{2}$/ $1\frac{1}{2}$/1+ $1\frac{1}{2}$ en Cijfer=score+1.

---

1. Bereken de inverse van matrix $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Antwoord: $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, veeg $[D \mid I_3]$ naar $[I_3 \mid D^{-1}]$

2. Gegeven is de matrixvergelijking $X^T B^{-1} = I_n + A$, waarbij A en B inverteerbare $n \times n$ -matrices zijn en I_n de eenheidsmatrix is met afmeting $n \times n$. Druk de eenduidige oplossing voor matrix X uit in *alleen* A^T en B^T.

Antwoord: $X^T B^{-1} = I_n + A \iff X^T = (I_n + A)B = B + AB$
$\iff X = (B + AB)^T = B^T + (AB)^T \iff X = B^T + B^T A^T$

3. Gegeven is dat matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ rij-equivalent is met

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (dit hoeft u niet na te gaan).

a. Geef een basis van $COL(C)$.
Antwoord: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$, de pivotkol$\underline{\text{m}}$ van C

b. Geef een basis van $NUL(C)$.
Antwoord: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, los op $C\underline{x} = \underline{0}$

z.o.z.

4. Construeer een 3×4 - matrix met rang 1.
Antwoord:

bijv. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ of $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

De matrix moet 1 pivotkolom hebben

5. Bewijs of weerleg de volgende 2 uitspraken (*bij dit vraagstuk dient een volledige en sluitende argumentatie te worden gegeven*):

a. Als F een $m \times n$ - matrix is waarvan elke rij een pivotpositie heeft dan geldt: $NUL(F) = \{\underline{0}\}$.
Juist/Onjuist + argumentatie:

Neem bijv. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan heeft elke rij van F een pivotpositie, maar
$NUL(F) = \text{Span}\{\underline{e}_3\} \neq \{\underline{0}\}$

b. Als A een $m \times n-$ matrix is geldt $\dim(NUL(A^T)) + \dim(ROW(A)) = m$.
Juist/Onjuist + argumentatie:

Pas het Rangtheorema toe op A^T (dit is een $n \times m$-matrix) dan volgt:
$\dim(NUL(A^T)) + \text{Rang}(A^T) = m$
$\iff \dim(NUL(A^T)) + \dim(COL(A^T)) = m$
$\iff \dim(NUL(A^T)) + \dim(ROW(A)) = m$

$\boxed{COL(A^T) = ROW(A)}$