Faculteit EWI, afdeling DIAM
Tentamen Lineaire Algebra (deel2), wi1273TA
Woensdag 27 juni 2012, 9.00-11.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$ waarbij $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ en $\underline{b} \in COL(A)^{\perp}$, dus $\underline{b}$ is een *willekeurige* vector in het orthogonale complement van $COL(A)$ in $\mathbb{R}^2$.

a. Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van $A\underline{x} = \underline{b}$.

b. Neem $\underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ en bepaal de kleinste-kwadraten-fout die rust op de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van $A\underline{x} = \underline{b}$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende twee beweringen:

a. **Bewering 1**: Voor elke $n \times n -$ matrix A geldt $\det(AA^T) \geq 0$.

b. **Bewering 2**: De verzameling $H = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) | \det(A) = 0\}$ is een lineaire deelruimte van $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. (N.B. $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ staat voor de vectorruimte van alle $2 \times 2 -$ matrices met reële coëfficiënten)

3. We beschouwen matrix $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarde(n) van α heeft matrix A de eigenwaarde -2?

b. Ga na voor welke waarde(n) van α vector $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ een eigenvector van A is.

c. Neem $\alpha = 0$ en ga na of A (reëel) diagonaliseerbaar is.

z.o.z.

4. Gegeven is de vectorruimte $V = \{f : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ is continu}\}$, dus $V = C[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, met daarin de lineaire deelruimte $W = Span\{1, \sin(t), \cos(t)\}$.
In W is basis $\mathcal{B} = \{1 - 3\sin(t) + 2\cos(t),\ \sin(t) - 3\cos(t),\ -2 + 4\sin(t) + 4\cos(t)\}$ gegeven en $\mathcal{T}$ is de lineaire afbeelding van W naar W met het voorschrift $\mathcal{T}(f(t)) = f'(t) - f''(0)\sin(t)$. Hierbij staan $f'(t)$ en $f''(t)$ uiteraard voor resp. de eerste en tweede afgeleide van $f(t)$ naar t, dus bijv. $\mathcal{T}(\sin(t)) = \cos(t)$.

a. Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.

b. Bepaal de representatiematrix $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}$ van lineaire afbeelding $\mathcal{T}$.

c. Bepaal basis $\mathcal{D}$ van W als gegeven is dat $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vervolgens wordt het inprodukt met voorschrift $< h(t), g(t) >= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} h(t)g(t)dt$ op vectorruimte V gedefinieerd.

d. Construeer, uitgaande van basis $\{1, \sin(t), \cos(t)\}$, in W een orthogonale basis m.b.v. het Gram-Schmidt-proces.

e. Bepaal een functie $r(t) \in Span\{1, \sin(t)\}$, *ongelijk aan de nulfunctie*, zodanig dat $r(t) \perp f(t)$ voor elke functie $f(t) \in Span\{1 + 4\sin(t)\}$.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	2	Opg. 4a	2
Opg. 1b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 2b	2	Opg. 3b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 4b	$1\frac{1}{2}$
				Opg. 3c	2	Opg. 4c	2
						Opg. 4d	2
						Opg. 4e	2