Alternatief voor 1a)
Omdat $(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$ geldt $A^T\underline{b} = \underline{0}$, dus
$A^TA\underline{x} = A^T\underline{b} \iff A^TA\underline{x} = \underline{0} \iff \begin{bmatrix} 17 & -51 \\ -51 & 153 \end{bmatrix}\underline{x} = \underline{0}$
$\iff \underline{x} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$

Uitwerking.

Opg. 1 a) $\underline{b} \in (\mathrm{Col}(A))^{\perp}$, dus $\hat{\underline{b}} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\underline{b}) = \underline{0}$.

De k.k.o.^{n} (dat zijn er oneindig veel omdat de kol^n van A afhankelijk zijn) vinden we dus door op te lossen $A\underline{x} = \underline{0}$.
Dat levert de k.k.o.^{n} $\underline{x} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Er geldt: de k.k.f. $= \|\underline{b} - \hat{\underline{b}}\| =$
$\|\underline{b} - \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\underline{b})\| = \|\underline{b} - \underline{0}\| = \|\underline{b}\|$
$= \left\| \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = 2\sqrt{17}$

Opg. 2 a) Juist, immers $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T)$
$= \det(A)\cdot\det(A) = (\det(A))^2 \geq 0$ voor elke $n\times n$-matrix A $\boxtimes$

b) Onjuist, neem bijv. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ en
$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, dan geldt $A \in H$ en $B \in H$
(immers $\det(A) = 0$ en $\det(B) = 0$) maar
$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \notin H$ want $\det(A+B) = -2$
Dit betekent dat H niet gesloten is t.a.v. de optelling en dus geen Lin. deelruimte is van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Opg. 3 a> $P_A(-2) = \left| A - (-2) I_2 \right| = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \overset{-1}{\downarrow}$

$= \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 0 \\ -1-\alpha & 1+\alpha & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & \alpha+3 & 0 \\ -1-\alpha & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{+1}$

$= (-1)^{2+1}(-1-\alpha)(\alpha+3) = (\alpha+1)(\alpha+3)$

ontwikkel naar Rij 2

Nu volgt: -2 is een eigenwaarde van A

$\iff P_A(-2) = 0 \iff \alpha = -1$ of $\alpha = -3$

b> $A\underline{x} = \begin{bmatrix} 3\alpha - 3 \\ \alpha - 1 \\ 12 \end{bmatrix}$

Nu geldt: $\underline{x}$ is een eigenvector van A als $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dus los op: $\begin{cases} 3\alpha - 3 = 3\lambda \\ \alpha - 1 = \lambda \\ 12 = -4\lambda \Rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$

$\alpha - 1 = \lambda \longleftrightarrow \alpha = -2$

klopt voor $\alpha = -2$ en $\lambda = -3$

Conclusie: $\underline{x}$ is een eigenvector van A als $\alpha = -2$ (de bijbehorende eigenwaarde is $\lambda = -3$.)

c> $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda)$

doe dezelfde vegoperaties als in a>

De eigenwaarden zijn dus:

$\lambda = -1$ (alg. mult $= 2$), $\lambda = 1$ (alg. mult $= 1$)

Nu geldt:

A is diagonaliseerb. $\iff \dim(E_{-1}) = 2$

(Alleen de meervoudige eigenw. kan de diagonaliseerbaarheid verzieken)

Los derhalve op : $A\underline{x} = -\underline{x}$

We beschouwen daartoe:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dit stelsel lin. vgl.n heeft slechts 1 vrije variabele, dus $\dim(E_{-1}) = 1$.

Dit impliceert dat A niet diagonaliseerbaar is.

Opg. 4

a) Zij $f(t) \in W$, dan kan men schrijven

$f(t) = a + b\sin t + c\cos t$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dan geldt $f'(t) = b\cos t - c\sin t$,

$f''(t) = -b\sin t - c\cos t$ en $f''(0) = -c$,

dus $T(f(t)) = b\cos t - c\sin t + c\sin t = b\cos t$

Hieruit volgt $R(T) = \text{Span}\{\cos t\}$ en $\{\cos t\}$ is een basis van $R(T)$.

$NUL(T)$ wordt gevonden door op te lossen

$T(f(t)) = 0$ voor elke $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow b\cos t = 0$ " " "

$\Rightarrow b = 0$

Dit betekent dat $NUL(T) = \text{Span}\{1, \cos t\}$

en bijv. $\{1, \cos t\}$ is een basis van $NUL(T)$

b) $T(1-3\sin t+2\cos t) = -3\cos t$

$T(\sin t - 3\cos t) = \cos t$

$T(-2+4\sin t+4\cos t) = 4\cos t$

Dus $[T]_B = \Big[\, [-3\cos t]_B \;\; [\cos t]_B \;\; [4\cos t]_B \,\Big]$

$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$ (N.B. Ook hieruit volgen de resultaten van onderdeel a))

c) $P_{B\leftarrow D} = P^{-1}_{D\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

De kolommen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ corresponderen met de functies $1-2\sin t-\cos t$, $-2+4\sin t+4\cos t$ en $-1+\sin t+6\cos t$

Dus $D = \{1-2\sin t-\cos t,\ -2+4\sin t+4\cos t,\ -1+\sin t+6\cos t\}$

d) $h_1(t) = 1$

$h_2(t) = \sin t - \dfrac{\overset{=0}{\langle \sin t, 1\rangle}}{\langle 1, 1\rangle}\, 1 = \sin t$

$h_3(t) = \cos t - \dfrac{\langle \cos t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\, 1 - \dfrac{\overset{=0}{\langle \cos t, \sin t\rangle}}{\langle \sin t, \sin t\rangle} \sin t$

$= \cos t - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt = \cos t - \dfrac{2}{\pi}$

Dus $\left\{1, \sin t, \cos t - \dfrac{2}{\pi}\right\}$ is een orthogonale basis van W.

e) We kunnen schrijven $R(t) = a + b\sin t$ voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$.

Nu geldt: $R(t) \perp f(t)$ voor elke $f(t) \in \text{Span}\{1+4\sin t\}$

$$\Longleftrightarrow R(t) \perp (1+4\sin t) \Longleftrightarrow \langle R(t), 1+4\sin t \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a+b\sin t)(1+4\sin t)\, dt = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a + \underbrace{4a\sin t + b\sin t}_{\text{draagt niet bij tot de integraalwaarde}} + \underbrace{4b\sin^2 t}_{= b(2-2\cos 2t)}\, dt = 0$$

$$\Longleftrightarrow a\pi + 2b\pi = 0 \Longleftrightarrow a = -2b$$

Dit betekent dat $R(t) = b(-2+\sin t)$ met $b \in \mathbb{R}$, dus we kunnen bijv. $R(t) = -2 + \sin t$ nemen.

N.B. Uit deze berekening volgt dat

$$\text{Span}\{1+4\sin t\}^{\perp} = \text{Span}\{-2+\sin t\}$$

(Het orthogonale complement van $\text{Span}\{1+4\sin t\}$ in $\text{Span}\{1, \sin t\}$)