TU Delft

Faculteit EWI, afdeling DIAM
Tentamen Lineaire Algebra (deel2), wi1273TA
Maandag 16 april 2012, 9.00-11.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Normering:

Opg. 1	3	Opg. 2a	$1\frac{1}{2}$	Opg. 3a	2	Opg. 4a	$2\frac{1}{2}$	Opg. 5a	2
		Opg. 2b	2	Opg. 3b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 4b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 5b	$1\frac{1}{2}$
				Opg. 3c	$1\frac{1}{2}$			Opg. 5c	2
				Opg. 3d	$1\frac{1}{2}$				

---

1. Gegeven zijn de punten $(0,-\frac{1}{2}),(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2}\sqrt{2}),(\frac{1}{2}\pi,1)$ en $(\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{2}\sqrt{2})$. Bepaal m.b.v. de kleinste-kwadraten-methode a en b zodat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ zo goed mogelijk aansluit bij de gegeven punten.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende twee beweringen:

a. **Bewering 1**: Voor een willekeurig drietal $n \times n-$ matrices F, G en H geldt $\det(HF + HG^T) = \det(F^T H + GH)$.

b. **Bewering 2**: Matrix $A = \begin{bmatrix} 3-\alpha & 7 \\ 0 & 3+\alpha \end{bmatrix}$ is voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ diagonaliseerbaar.

3. Met het voorschrift $\mathcal{T}(p(x)) = x(1-x)p'(x)$ wordt een lineaire afbeelding $\mathcal{T}: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ gedefinieerd. Hierbij staat $p'(x)$ uiteraard voor de afgeleide van $p(x)$ naar x. Op $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_3$ zijn resp. de bases $\mathcal{B} = \{1, 1+x, x+x^2\}$ en $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$ gegeven.

a. Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.

b. Bepaal de representatiematrix M van lineaire afbeelding $\mathcal{T}$ t.o.v. de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.
Vervolgens worden op $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_3$ resp. de bases $\mathcal{A}$ en $\mathcal{D}$ geïntroduceerd.

c. Bepaal $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$ als $\mathcal{A} = \{1+x, 1-x, 1+x^2\}$.

d. Geef een verband tussen $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}$, M en N, als N de representatiematrix is van $\mathcal{T}$ t.o.v. basis $\mathcal{A}$ (links op $\mathbb{P}_2$) en basis $\mathcal{D}$ (rechts op $\mathbb{P}_3$). Geef een duidelijke beargumentatie van uw antwoord.

4. Op $\mathbb{P}_2$ definiëren we het inprodukt met voorschrift $< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

a. Construeer, uitgaande van $\{1, x, x^2\}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een orthogonale basis van $\mathbb{P}_2$.

b. Bereken de beste approximatie (benadering) van $q(x) = x^2$ in $\mathbb{P}_1$.

5. We beschouwen matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p^2 - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ waarbij $p > 0$.

a. Bepaal de eigenwaarden van A met hun algebraïsche multipliciteit.

b. Ga na voor welke waarde(n) van p de vector $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

c. Geef de eigenwaarden, met bijbehorende algebraïsche multipliciteit, van A^{-1} en A^T.