Uitwerking

Opg. 1 Invullen van de gegeven punten in het functievoorschrift $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ leidt tot het stelsel lineaire vgl$^{\underline{n}}$:

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ b = 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Dit kan men schrijven in de vorm $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underline{c}$,

waarbij $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$ en $\underline{c} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Dit lineaire stelsel is strijdig en de kleinste-kwadraten-oplossing (in deze situatie is er slechts één) wordt gevonden door op te lossen

$$A^T A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T\underline{c} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\iff a = -\frac{1}{4}$ en $b = 1$

De gezochte functie is dus $f(x) = -\frac{1}{4}\cos(x) + \sin(x)$

Opg. 2 a) <u>Juist</u>, immers $\det(HF + HG^T) =$

$\det(H(F+G^T)) = \det(H)\det(F+G^T)$

$= \det(F+G^T)\det(H) = \det((F+G^T)^T)\det(H)$

$= \det(F^T+G)\det(H) = \det(F^TH + GH)$

$\boxtimes$

b) <u>Onjuist</u>, als $\alpha = 0$ is $\lambda = 3$ een eigenwaarde met algebraische multipliciteit 2. Verder geldt $E_3 = \text{Span}\{\underline{e}_1\}$, dus $\dim(E_3) = 1$ en $\dim(E_3) <$ alg. mult. van $\lambda = 3$. Bijgevolg is A niet diagonaliseerbaar als $\alpha = 0$ $\boxtimes$

<u>Opg. 3</u> a) Als $p(x) \in \mathbb{P}_2$ kan men schrijven $p(x) = a + bx + cx^2$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$ en geldt $T(p(x)) = (x - x^2)(b + 2cx)$, dus $T(p(x)) = b(x - x^2) + 2c(x^2 - x^3)$

Hieruit volgt $R(T) = \text{Span}\{x - x^2, x^2 - x^3\}$, en daar $\{x - x^2, x^2 - x^3\}$ onafhankelijk is, is dit een basis van $\text{Nul}(T)$

Los vervolgens op $T(p(x)) =$ nulpol.

$\iff b(x - x^2) + 2c(x^2 - x^3) =$ nulpol.

$\iff bx + (2c - b)x^2 - 2cx^3 =$ nulpol.

$\iff \begin{cases} b = 0 \\ 2c - b = 0 \\ -2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \text{ is willek.} \\ b = c = 0 \end{cases}$

Hieruit volgt $\text{Nul}(T) = \{p(t) = a \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{P}_0$

en bijv $\{1\}$ is een basis van $\text{Nul}(T)$

b) $T(1) = 0 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+x) = x - x^2 \Rightarrow [T(1+x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(x+x^2) = (x - x^2)(1+2x) = x - x^2 + 2x^2 - 2x^3$,

dus $T(x+x^2) = x + x^2 - 2x^3 \Rightarrow [T(x+x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Nu volgt $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $[1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[1+x]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[x+x^2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dus $P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) We hebben het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{B} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \mathbb{P}_3 \text{ basis } \mathcal{C} \arrow[d, "P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{A} \arrow[r, "N"] & \mathbb{P}_3 \text{ basis } \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Uit dit diagram leest men af:

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} \cdot M = N \cdot P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$$

Een equivalent verband zoals

$M = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} N P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$ is uiteraard ook goed.

Opg-4 a) Pas het Gram-Schmidt-proces toe op $\{1, x, x^2\}$, dat geeft:

$$q_1(x) = 1$$

$$q_2(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = x - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} \cdot 1$$

$$= x - \frac{1}{2}$$

$$q_3(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x-\frac{1}{2}\rangle}{\langle x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\rangle}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 1\,dx} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2\,dx}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\,dx}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

b) De beste approximatie van $q(x) = x^2$ in $\mathbb{P}_1$ is $\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_1}(x^2)$

Uit het vorige onderdeel volgt:

$$\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_1}(x^2) = x^2 - q_3(x) = x^2 - \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$= x - \frac{1}{6}$$

Opg 5 a> $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ p^2-1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & p-\lambda \end{vmatrix} = (p-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ p^2-1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (p-\lambda)\left(\lambda^2-1-p^2+1\right) = (p-\lambda)(\lambda-p)(\lambda+p)$

$= -(\lambda-p)^2(\lambda+p)$

De eigenwaarden zijn dus:

$\lambda = p$ met alg. mult. 2

$\lambda = -p$ met alg. mult. 1

b> Los op: $A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 = \lambda \\ p^2-1-3 = 3\lambda \\ p = \lambda \end{cases} \Rightarrow p = \lambda = 4$

Conclusie: als $p=4$ dan is $\underline{x} = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ eigen-vector bij eigenwaarde $\lambda = 4$

c> De eigenwaarden van A^{-1} zijn:

$\lambda = \frac{1}{p}$ met alg. mult. 2

$\lambda = -\frac{1}{p}$ met alg. mult. 1

De eigenwaarden van A^T zijn:

$\lambda = p$ met alg. mult. 2

$\lambda = -p$ met alg. mult. 1