Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra (deel 2), wi1273TA
Woensdag 22 juni 2011, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

---

1. Een opgave over determinanten.
   (a) Bepaal $\det(A)$ en $\det(B)$ als A en B inverteerbare $3 \times 3-$ matrices zijn waarvoor geldt $\det(2\,A^{-1}) = 5 = \det(A^2\,(B^T)^{-1})$.
   (b) **Bewijs** of **weerleg:** Voor een willekeurig drietal $n \times n-$ matrices F, G en H geldt $\det(HF + HG^T) = \det(F^T H + GH)$.

2. Gegeven is de vectorruimte $C\,[0, 1]$, alle continue functies op $[0, 1]$, met daarin de lineaire deelruimte $W = Span\,\{1,\, e^t,\, e^{-t}\}$. Tevens zijn gegeven basis $\mathcal{B} = \{1, 1 + e^t, e^t + e^{-t}\}$ van W en de lineaire afbeelding
   $\mathcal{T} : W \to W$ met voorschrift $\mathcal{T}(f(t)) = f\,'(t) + f(t)$ (uiteraard staat $f\,'(t)$ voor de afgeleide van f naar t).
   (a) Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.
   (Hint: Representeer elementen uit W als lineaire combinaties van een basis van W)
   (b) Bepaal basis $\mathcal{D}$ van W als $P_{\mathcal{D} \longleftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (c) Bepaal $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}$.

3. Gegeven is de vectorruimte $C\,[0, \pi]$, alle continue functies op $[0, \pi]$, met daarin de lineaire deelruimte $S = Span\,\{1,\, \sin(t),\, \cos(t)\}$ .Verder is op $C\,[0, \pi]$ gegeven het inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ met voorschrift $\langle f(t),\, g(t)\rangle = \int_0^\pi\, f(t)g(t)dt$.
   (a) Construeer, uitgaande van basis $\mathcal{B} = \{1,\, \sin(t),\, \cos(t)\}$, m.b.v. het Gram-Schmidt proces een orthogonale basis van S.
   (b) Bepaal de beste approximatie van $r(t) = \sin(t)$ in $Span\,\{1,\, 2 + \cos(t)\}$.

4. **Bewijs** of **weerleg:** Als λ een eigenwaarde is van inverteerbare matrix C, dan is $\frac{1}{\lambda}$ een eigenwaarde van C^{-1}.

z.o.z.

5. Gegeven is matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \beta \\ 2 & -\beta-1 & -1 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van B.

   (b) Neem $\beta = -1\frac{1}{2}$ en ga na of B diagonaliseerbaar is.

6. Gegeven is het discrete dynamische systeem $\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$, voor $k \in \mathbb{N}$ met startvector $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal de oplossing van het gegeven discrete dynamische systeem.

   (b) Neem aan dat $0 < \alpha < 2$ en bespreek het asymptotisch gedrag van oplossing $\underline{x}_k$ voor $k \to \infty$.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	$2\frac{1}{2}$	Opg. 4	2	Opg. 5a	2	Opg. 6a	2
Opg. 1b	2	Opg. 2b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 3b	2			Opg. 5b	2	Opg. 6b	1
		Opg. 2c	$1\frac{1}{2}$								