Uitwerking

Opg. 1 a/ $\det(2A^{-1}) = 5 \Rightarrow 2^3 \det(A^{-1}) = 5 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{5}{8} \Rightarrow \det(A) = 8/5$$

En $\det(A^2 (B^T)^{-1}) = 5 \Rightarrow \det(A^2) \cdot \frac{1}{\det(B^T)} = 5$

$$\Rightarrow \det(B) = \frac{(\det(A))^2}{5} = \frac{64}{125}$$

b/ Waar,

immers $\det(HF + HG^T) = \det(H)\det(F + G^T)$

$= \det(F + G^T)\det(H) = \det((F+G^T)^T)\det(H)$

$= \det(F^T + G)\det(H) = \det(F^T H + GH)$

$\boxtimes$

Opg. 2 a/ Zij $f(t) \in W$ dan kan men schrijven

$f(t) = a_0 + a_1 e^t + a_2 e^{-t}$ voor zekere $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

en geldt:

$T(f(t)) = a_1 e^t - a_2 e^{-t} + a_0 + a_1 e^t + a_2 e^{-t}$

$= a_0 + 2a_1 e^t$

Hieruit volgt:

$f(t) \in NUL(T) \Leftrightarrow a_0 = a_1 = 0$ en $a_2 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(t) \in \text{Span}\{e^{-t}\}$

Dus $NUL(T) = \text{Span}\{e^{-t}\}$ en $\{e^{-t}\}$ is een basis van $NUL(T)$

$f(t) \in R(T) \Leftrightarrow f(t) \in \text{Span}\{1, e^t\}$

Dus $R(T) = \text{Span}\{1, e^t\}$ en $\{1, e^t\}$ is een basis van $R(T)$.

b/ $\underset{B\leftarrow D}{P} = \underset{D\leftarrow B}{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \left[[d_1(t)]_B \quad [d_2(t)]_B \quad [d_3(t)]_B \right]$

Hieruit volgt: $\begin{cases} d_1(t) = \frac{1}{2}(1+e^t) + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \qquad = \frac{1}{2} + e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ d_2(t) = 1 \\ d_3(t) = -\frac{1}{2}(1+e^t) + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \qquad = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}$

Dus $D = \left\{ \frac{1}{2} + e^t + \frac{1}{2}e^{-t}, 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} \right\}$

c/ $T(1) = 1 \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+e^t) = e^t + 1 + e^t = 1 + 2e^t \Rightarrow [T(1+e^t)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(e^t + e^{-t}) = e^t - e^{-t} + e^t + e^{-t} = 2e^t \Rightarrow [T(e^t + e^{-t})]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nu volgt: $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opg. 3 a/ Neem $h_1(t) = 1$

$h_2(t) = \sin t - \frac{\langle \sin t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$

$= \sin t - \frac{\int_0^\pi \sin t \, dt}{\int_0^\pi 1 \, dt} = \sin t - \frac{2}{\pi}$

$h_3(t) = \cos t - \frac{\langle \cos t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle \cos t, \sin t - \frac{2}{\pi} \rangle}{\langle \sin t - \frac{2}{\pi}, \sin t - \frac{2}{\pi} \rangle} (\sin t - \frac{2}{\pi})$

$$\Rightarrow h_3(t) = \cos t - \frac{\int_0^\pi \cos t \, dt}{\int_0^\pi 1 \, dt} - \frac{\int_0^\pi \cos t \sin t - \frac{2}{\pi}\cos t \, dt}{\int_0^\pi \left(\sin t - \frac{2}{\pi}\right)^2 dt}\left(\sin t - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \cos t - 0 - 0 = \cos t$$

Dus $\left\{1, \sin t - \frac{2}{\pi}, \cos t\right\}$ is een orthogonale basis van S'.

b/ Uit a/ volgt dat $\{1, \cos t\}$ een orthogonale basis is van $\mathrm{Span}\{1, 2+\cos t\}$.

Dus: de beste approximatie van $R(t)$ in $\mathrm{Span}\{1, 2+\cos t\} = \frac{\langle \sin t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 + \frac{\langle \sin t, \cos t\rangle}{\langle \cos t, \cos t\rangle}\cos t$

$$= \frac{\int_0^\pi \sin t \, dt}{\int_0^\pi 1 \, dt} + \frac{\int_0^\pi \sin t \cos t \, dt}{\int_0^\pi \cos^2 t \, dt}\cos t$$

$$= \frac{2}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi}$$

Opg. 4 Waar,

immers: λ is een eigenwaarde van C

$\Longleftrightarrow$ er bestaat een vector $\underline{x}$, met $\underline{x} \neq \underline{0}$, zodat $C\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$\Longleftrightarrow$ " " " " " " " " $\underline{x} = C^{-1}\lambda \underline{x}$

$\Longleftrightarrow$ " " " " " " " " $C^{-1}\underline{x} = \frac{1}{\lambda}\underline{x}$

$\lambda \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ is een eigenwaarde van C^{-1} $\boxtimes$

Opg. 5

a) $P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \beta \\ 2 & -\beta-1-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\beta-1-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & \beta \\ 2 & \beta-\lambda \end{vmatrix}$

ontwikkel naar kolom 2

$= -(\lambda+\beta+1)(\lambda^2 - \beta\lambda - 2\lambda)$

$= -(\lambda+\beta+1)\lambda(\lambda-(\beta+2))$

De eigenwaarden zijn derhalve $\lambda_1 = -\beta-1$, $\lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = \beta+2$.

b) Als $\beta = -1\frac{1}{2}$ zijn de eigenwaarden

$\lambda = 0$ (alg. mult. $= 1$)

en $\lambda = \frac{1}{2}$ (alg. mult $= 2$)

Nu gaat het om $\dim(E_{1/2})$, want B is diagonaliseerbaar d.e.s.d. als $\dim(E_{1/2}) = 2$

We lossen derhalve op $B\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{x}$ en beschouwen daarom $\left[\begin{array}{ccc|c} 1\frac{1}{2} & 0 & -1\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (\times 2) \\ \\ (\times \frac{1}{2}) \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Dit stelsel lineaire vgl. heeft 1 vrije var., dus $\dim(E_{1/2}) = 1$ en bijgevolg is B niet diagonaliseerbaar.

Opg. 6 a/ De eigenwaarden van matrix $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ zijn $1 \pm \alpha$ en de bijbehorende eigenruimten zijn $E_{1+\alpha} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en $E_{1-\alpha} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Verder geldt $\underline{x}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dus

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^k \underline{x}_0 = \frac{1}{2}(1+\alpha)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1-\alpha)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

voor $k \in \mathbb{N}$

b/ Als $0 < \alpha < 2$ geldt $1+\alpha > 1$ en $-1 < 1-\alpha < 1$, d.w.z. $(1-\alpha)^k \to 0$ als $k \to \infty$ en $(1+\alpha)^k$ groeit aan tot ∞ als $k \to \infty$.

Dit betekent dat o.d.d. (als k groot is) component $-\frac{1}{2}(1-\alpha)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ te verwaarlozen is en $\underline{x}_k \approx \frac{1}{2}(1+\alpha)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Als k toeneemt benadert $\underline{x}_k$ dus steeds beter de richting van $E_{1+\alpha}$.