Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra (deel 2), wi1273TA
Maandag 11 april 2011, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

---

1. Bereken, door toepassing van de kleinste-kwadratenmethode, γ_1 en γ_2 zo dat de grafiek van $y = \gamma_1\sqrt{x} + \gamma_2\cos(\pi x)$ zo goed mogelijk aansluit bij de punten $[1, 0]$, $[4, 2]$, $[9, 4]$, en $[16, 5]$ in het $(x, y)-$ vlak.

2. Bereken de determinant van matrix $F = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 4 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 5 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$ als gegeven is dat $\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) = 3$.

3. Met het voorschrift $\mathcal{T}(p(t)) = p(t) + (1 - \frac{1}{2}t^2)p''(t)$ wordt een lineaire afbeelding $\mathcal{T} : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gedefinieerd.

   (N.B. $p''(t)$ staat uiteraard voor de tweede afgeleide van p naar t).

   (a) Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.
   We definiëren bovendien de bases $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ en $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ voor $\mathbb{P}_2$ en het inprodukt met voorschrift $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

   (b) Bepaal $[\mathcal{T}]_\mathcal{B}$ en $P_{\mathcal{B}\longleftarrow\mathcal{E}}$.

   (c) Geef een verband tussen $[\mathcal{T}]_\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}\longleftarrow\mathcal{E}}$ en M, als M de representatiematrix is van $\mathcal{T}$ t.o.v. basis $\mathcal{B}$ (links op $\mathbb{P}_2$) en basis $\mathcal{E}$ (rechts op $\mathbb{P}_2$).

   (d) Construeer, uitgaande van basis $\mathcal{B}$, m.b.v. het Gram-Schmidt proces een orthogonale basis van $\mathbb{P}_2$.

4. **Bewijs** of **weerleg:** Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ eigenvectoren zijn van $n \times n-$ matrix B dan is ook $\underline{x} + \underline{y}$ een eigenvector van B.

5. Gegeven zijn de matrices $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ en F, gedefinieerd door $F = PDP^{-1}$.

   Beantwoord de volgende vragen zonder matrix F expliciet uit te rekenen.

   (a) Geef de eigenwaarden van F met hun algebraïsche multipliciteit en geef een basis van elk van de eigenruimten.

   (b) Ga na of de vector $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van F.

   (c) Beargumenteer dat matrix F inverteerbaar is en geef een diagonalisatie (eigenwaardendecompositie) van F^{-1}.

6. Ga na of matrix $G = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ diagonaliseerbaar is.

Normering:

Opg. 1	$2\frac{1}{2}$	Opg. 2	2	Opg. 3a	2	Opg. 4	2	Opg. 5a	$1\frac{1}{2}$	Opg. 6	2
				Opg. 3b	3			Opg. 5b	$1\frac{1}{2}$		
				Opg. 3c	$1\frac{1}{2}$			Opg. 5c	2		
				Opg. 3d	$2\frac{1}{2}$						