Uitwerking

Opg. 1 Invullen van de punten geeft:

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 + \gamma_2 = 2 \\ 3\gamma_1 - \gamma_2 = 4 \\ 4\gamma_1 + \gamma_2 = 5 \end{cases}$$

In matrixvorm staat hier: $A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \underline{b}$, waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Los vervolgens op: $A^T A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = A^T \underline{b}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \gamma_1 = \frac{69}{58} \text{ en } \gamma_2 = \frac{9}{58}$$

De gezochte kromme is dus: $y = \frac{69}{58}\sqrt{x} + \frac{9}{58}\cos(\pi x)$

Opg. 2

$$\det(F) \underset{\text{ontwikkel naar rij 1}}{=} 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = (-5)\, 2^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -40 \cdot 3 = -120$$

Opg. 3 a) Een polynoom $p \in \mathbb{P}_2$ kan men schrijven in de vorm $p(t) = a + bt + ct^2$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dan geldt:

$$T(p(t)) = a + bt + ct^2 + (1 - \tfrac{1}{2}t^2)2c$$

$$= a + 2c + bt$$

Hieruit volgt: $R(T) = \text{Span}\{1, t\}$ dus $\{1, t\}$ is een basis van $R(T)$

$$p(t) \in NUL(T) \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Dus $NUL(T) = \text{Span}\{t^2 - 2\}$

en $\{t^2 - 2\}$ is een basis van $NUL(T)$

b/ $T(1) = 1 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+t) = 1+t \Rightarrow [T(1+t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+t+t^2) = 1+t+t^2 + 2(1-\frac{1}{2}t^2) = 3+t$

$\Rightarrow [T(1+t+t^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nu volgt: $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dus $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c/

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "M"] & \mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{B} \arrow[d, "P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{E} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{E}}}"'] & \mathbb{P}_2 \text{ basis } \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Lees af:

$M = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow M = P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} [T]_{\mathcal{B}}$

of: $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} M = [T]_{\mathcal{B}}$

d/ $\varphi_1(t) = 1$

$$\varphi_2(t) = 1+t - \frac{\langle 1+t, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = 1+t - \frac{\int_{-1}^{1} 1+t \, dt}{\int_{-1}^{1} 1 \, dt} = 1+t - \frac{2}{2} = t$$

$$\varphi_3(t) = 1+t+t^2 - \frac{\langle 1+t+t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle 1+t+t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t$$

$$= 1+t+t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} 1+t+t^2 \, dt}{\int_{-1}^{1} 1 \, dt} - \frac{\int_{-1}^{1} t+t^2+t^3 \, dt}{\int_{-1}^{1} t^2 \, dt} t$$

$$= 1+t+t^2 - \frac{2\,{}^2\!/_3}{2} \cdot 1 - \frac{{}^2\!/_3}{{}^2\!/_3} \cdot t$$

$$= 1+t+t^2 - \frac{4}{3} - t = -\frac{1}{3} + t^2$$

Dus $\{1, t, t^2 - 1/3\}$ is een orthogonale basis van $\mathbb{P}_2$

Opg. 4 **Onjuist**,

immers neem bijv. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dan geldt $B.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en

$B.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bijgevolg zijn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ eigenvectoren van B (bij de resp. eigenwaarden 2 en 3)

Maar de somvector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is geen eigenvector van B, want $B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en dit is geen veelvoud van $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Opg. 5 a) De eigenwaarden zijn:

$\lambda = 1$ (alg. mult. = 1)

$\lambda = 2$ (alg. mult = 1)

$\lambda = 3$ (alg. mult = 2)

Bases van de bijbehorende eigenruimten vindt men door de juiste kolommen uit matrix P te nemen.

Een basis van E_1 is $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Een basis van E_2 is $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Een basis van E_3 is $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\underline{x}$ is evident geen veelvoud van

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ of van $\begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\end{bmatrix}$, dus $\underline{x} \notin E_1$ en $\underline{x} \notin E_2$.

Er hoeft dus alleen te worden nagegaan of $\underline{x} \in E_3$.

Los derhalve op: $\underline{x} = c_1 \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$

Bekijk daarom de aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt dat $\underline{x}$ niet te schrijven is als lin. comb. van $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$, dus

$$\underline{x} \notin E_3$$

Conclusie: $\underline{x}$ is geen eigenvector van F.

c) F is inverteerbaar want F heeft niet eigenwaarde 0.

Verder geldt: $F = PDP^{-1}$, dus

$F^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1}$

$= P \begin{bmatrix}1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{3}\end{bmatrix} P^{-1}$

Dus $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ en $D^{-1} = \begin{bmatrix}1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

geven een diagonalisatie van F^{-1}.

<u>Opg. 6</u>: $P_G(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 11 & 1 \\ 0 & -7-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$

Ontwikkel naar rij 2

$= -(\lambda+7)(\lambda^2 - 8\lambda + 16)$
$= -(\lambda+7)(\lambda-4)^2$

De eigenwaarden van G zijn dus,
$\lambda = -7$ (alg. mult. $= 1$)
$\lambda = 4$ (alg. mult. $= 2$)

Omdat $\lambda = -7$ een enkelvoudige eigenwaarde is zal E_{-7} 1-dimensionaal zijn.
Om de diagonaliseerbaarheid van G te onderzoeken hoeft derhalve alleen $\dim(E_4)$ te worden bepaald.
Los dus op $G\underline{x} = 4\underline{x}$. Dat leidt tot de aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu zien we dat het homogene lineaire stelsel vgl^n $G\underline{x} = 4\underline{x}$ slechts 1 vrije variabele heeft.
Bijgevolg is E_4 1-dimensionaal en G niet diagonaliseerbaar, daar G slechts 2 onafhankelijke eigenvectoren levert i.p.v. 3