Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Maandag 18 januari 2010, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- De normering vindt u na de opgaven.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Het eindresultaat ontstaat na verrekening van de score van de tussentoets.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\gamma^2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\gamma \\ 8-\gamma^2 \end{bmatrix}$ waarbij $\gamma \in \mathbb{R}$.

   (a) Ga na voor welke waarde(n) van γ geldt $\underline{b} \in COL(A)$.

   (b) Neem $\gamma = 2$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

   (c) Bepaal γ als gegeven is dat A inverteerbaar is en bovendien geldt $\left|2\,A^{-1}\right| = -1$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende twee beweringen:

   (a) **Bewering 1:** Als B een $10 \times 12-$ matrix is, $\underline{p} \in \mathbb{R}^{10}$ en het lineaire stelsel $B\,\underline{x} = \underline{p}$ oplosbaar is met 3 vrije variabelen, dan is het mogelijk vector $\underline{p}$ te vervangen door een vector $\underline{q} \in \mathbb{R}^{10}$ z.d.d. $B\,\underline{x} = \underline{q}$ een strijdig lineair stelsel vergelijkingen is.

   (b) **Bewering 2:** Als A een inverteerbare matrix is met eigenwaarde 5, dan is $\frac{1}{5}$ een eigenwaarde van A^{-1}.

3. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die vectoren uit $\mathbb{R}^2$ eerst roteert om (0,0) over een hoek van $\frac{\pi}{3}$ radialen (tegen de wijzers van de klok in) en vervolgens (de geroteerde vector) loodrecht projecteert op $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bepaal de standaardmatrix (representatiematrix) van lineaire afbeelding T.

(b) Bepaal een basis van $NUL(T)$ en een basis van $\mathcal{R}(T)$.

(c) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van T.

4. Gegeven zijn de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ontbind vector $\underline{d}$ in een component $\underline{v} \in ROW(B)$ en een component $\underline{w} \in ROW(B)^{\perp}$, het orthogonale complement van $ROW(B)$ in $\mathbb{R}^4$.

5. Bereken, door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode, γ_1 en γ_2 zo dat de grafiek van $y = \gamma_1 + \gamma_2\, x^2$ zo goed mogelijk aansluit bij de punten: [-2,6], [-1,5], [0,1], [1,7] en [2,8].

6. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = t\,p(t) + p(0)$. Verder wordt op $\mathbb{P}_1$ de basis $\mathcal{A} = \{t+1,\, t-1\}$ en op $\mathbb{P}_2$ de basis $\mathcal{B} = \left\{t^2+1,\, t-1,\, t+1\right\}$ gekozen.

   (a) Toon aan dat afbeelding T lineair is.

   (b) Bepaal de representatiematrix F van lineaire afbeelding T t.o.v. basis $\mathcal{A}$ op $\mathbb{P}_1$ en basis $\mathcal{B}$ op $\mathbb{P}_2$.

   (c) Als $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}_2$ resp. worden voorzien van de bases $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ wordt de lineaire afbeelding T t.o.v. deze 2 bases ook door een matrix gerepresenteerd, deze matrix zullen we G noemen. Geef een verband tussen F, G, $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}}$ en $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ (of inversen hiervan indien die bestaan). Beargumenteer duidelijk hoe u tot dit verband komt.

   Voor de volgende 2 onderdelen beschouwen we $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}_2$ als lineaire deelruimten van $\mathbb{P}_\infty$ en wordt op $\mathbb{P}_\infty$ het inprodukt met voorschrift $< f, g > = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ gedefinieerd.

   (d) Construeer, uitgaande van basis $\left\{1,\, t,\, t^2\right\}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een **orthogonale** basis $\{p_1(t),\, p_2(t),\, p_3(t)\}$van $\mathbb{P}_2$.

   (e) Bepaal de orthogonale projectie van $q(t) = t^3$ op $\mathbb{P}_1$.

7. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & \alpha & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Ga na voor welke waarde(n) van α matrix A de eigenwaarde $\lambda = 1$ heeft.

(b) Neem $\alpha = 2$ en ga na of matrix A diagonaliseerbaar is.

(c) **Bewijs of weerleg:** Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ kan startvector $\underline{x}_0$ zo worden gekozen dat de oplossing van het discrete dynamische systeem

$$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (startvector)} \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

een onbegrensde baan heeft.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	1.5	Opg. 4	3	Opg. 5	3	Opg. 6a	2	Opg. 7a	
Opg. 1b	1.5	Opg. 2b	2	Opg. 3b	2					Opg. 6b	1.5	Opg. 7b	
Opg. 1c	2			Opg. 3c	2					Opg. 6c	2	Opg. 7c	
										Opg. 6d	2.5		
										Opg. 6e	1.5		