# Uitwerking

**Opg. 1:** a/ Er geldt: $\underline{b} \in \mathrm{Col}(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar.
Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1+\gamma \\ 2 & 4 & 9 & 8-\gamma^2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \quad -2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\gamma^2 & \gamma \\ 0 & 2 & 7-2\gamma^2 & 6-\gamma^2 \end{array}\right] -1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\gamma^2 & \gamma \\ 0 & 0 & \underbrace{4-\gamma^2}_{(2-\gamma)(2+\gamma)} & \underbrace{6-\gamma^2-\gamma}_{-(\gamma+3)(\gamma-2)} \end{array}\right]$$

Nu volgt:
$\underline{b} \in \mathrm{Col}(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosb. $\iff \gamma \neq -2$

b/ Los op $A\underline{x} = \underline{0}$. Uit a/ volgt dat de aangevulde matrix van dit lineaire stelsel kan worden geveegd tot (subst. $\gamma = 2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\tfrac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5\tfrac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \tfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -5\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ met } x_3 \in \mathbb{R}$$

Hieruit volgt: $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

en bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $\mathrm{Nul}(A)$

c/ Bepaal eerst:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\gamma^2 \\ 0 & 2 & 3-\gamma^2 \\ 0 & 0 & 4-\gamma^2 \end{vmatrix} = 2(4-\gamma^2), \text{ zie a/}$$

Verder volgt: $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = \dfrac{2^3}{|A|} = \dfrac{4}{4-\gamma^2}$,

dus $|2A^{-1}| = -1 \iff \dfrac{4}{4-\gamma^2} = -1 \iff 4-\gamma^2 = -4 \iff \gamma = \pm 2\sqrt{2}$

Opg. 2: a/ Juist,

uit de gegevens volgt dat matrix $B$ 9 pivotposities heeft. Dit betekent dat $\text{Col}(B)$ een Lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^{10}$, maar $\text{Col}(B) \neq \mathbb{R}^{10}$. Kies nu $\underline{q} \in \mathbb{R}^{10}$ maar $\underline{q} \notin \text{Col}(B)$, o.g.v. het voorgaande is dat mogelijk, dan is $B\underline{x} = \underline{q}$ strijdig $\boxtimes$

b/ Juist, immers:

$A$ heeft eigenw. $\lambda = 5 \iff$

Er is een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ z.d.d. $A\underline{x} = 5\underline{x} \iff$

" " " " " " $A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}(5\underline{x}) \iff$

" " " " " " $\underline{x} = 5A^{-1}\underline{x} \iff$

" " " " " " $A^{-1}\underline{x} = \frac{1}{5}\underline{x} \iff$

$\lambda = \frac{1}{5}$ is een eigenw. van $A^{-1}$ $\boxtimes$

Opg. 3: a/

$$\underline{e}_1 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}]{\text{roteren}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{projecteren}} \underline{0}$$

$$\underline{e}_2 \xrightarrow{\text{roteren}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{projecteren}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt:

De standaardmatrix van $T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b/ Zowel meetkundig als uit onderdeel a/ volgt:

$\text{Nul}(T) = \text{Span}\{\underline{e}_1\}$ en $\mathcal{R}(T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Dus bijv. $\{\underline{e}_1\}$ is een basis van $\text{Nul}(T)$ en bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $\mathcal{R}(T)$.

c/ Uit de standaardmatrix $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ òf onderdeel b/ of een meetkundige beschouwing volgt dat $T$ de eigenwaarden $\lambda = 0$ en $\lambda = 1/2$ heeft en dat $E_0 = \text{Span}\{\underline{e}_1\}$ en $E_{1/2} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

<u>Opg. 4</u>: Als we de rijen van B resp. $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $\underline{b}_4$ noemen, geldt $\underline{b}_4 = \underline{b}_1 - \frac{1}{2}\underline{b}_2 + \frac{1}{2}\underline{b}_3$.

Verder is $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ onafhankelijk, dus een basis van ROW(B).

Uit deze basis construeren we een orthogonale basis $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ m.b.v. het Gram-Schmidt-proces. Neem daartoe:

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \underline{b}_2 - \left(\frac{\underline{b}_2 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{c}_2 = -\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_3 = \underline{b}_3 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{c}_3 = -\frac{1}{2}\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nu volgt:

$$\underline{v} = \mathrm{proj}_{\mathrm{ROW}(B)}(\underline{d}) = \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_3}{\underline{c}_3 \cdot \underline{c}_3}\right)\underline{c}_3$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{14}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w} = \mathrm{proj}_{\mathrm{ROW}(B)^\perp}(\underline{d}) = \underline{d} - \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opg 5: Substitutie van de punten geeft:

$$\begin{cases} \gamma_1 + 4\gamma_2 = 6 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 5 \\ \gamma_1 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 7 \\ \gamma_1 + 4\gamma_2 = 8 \end{cases}$$

Dat is in matrixvorm: $A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \underline{b}$, waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dit lineaire stelsel is strijdig. De unieke kleinste-kwadraten-oplossing wordt gevonden door op te lossen $A^TA \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = A^T\underline{b}$.

Beschouw daartoe $\left[ A^TA \middle| A^T\underline{b} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 27 \\ 10 & 34 & 68 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \gamma_2 = 1$ en $\gamma_1 = 17/5$

De gezochte kromme is dus $y = 17/5 + x^2$

Opg 6 a/ Zij $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_1$, dan geldt:

$T((p+q)(t)) = t(p+q)(t) + (p+q)(0)$

$= t(p(t) + q(t)) + p(0) + q(0)$

$= tp(t) + p(0) + tq(t) + q(0) = T(p(t)) + T(q(t))$

Zij $p(t) \in \mathbb{P}_1$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt:

$T((\alpha p)(t)) = t(\alpha p)(t) + (\alpha p)(0)$

$= t\alpha p(t) + \alpha p(0) = \alpha(tp(t) + p(0)) = \alpha T(p(t))$

Conclusie: $T$ is een lineaire afbeelding $\boxtimes$

b/ $T(t+1) = t(t+1) + 1 = t^2 + t + 1$

$= t^2 + 1 + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2}(t+1) \Rightarrow [T(t+1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$T(t-1) = t(t-1) - 1 = t^2 - t - 1$

$= t^2 + 1 + \frac{1}{2}(t-1) - 1\frac{1}{2}(t+1) \Rightarrow [T(t-1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Dus $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ is de gezochte representatiematrix.

c/

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{basis } \mathcal{A}}{\mathbb{P}_1} \arrow[d, "F"'] & \underset{\text{basis } \mathcal{C}}{\mathbb{P}_1} \arrow[l, "P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}}"'] \arrow[d, "G"] \\
\underset{\text{basis } \mathcal{B}}{\mathbb{P}_2} & \underset{\text{basis } \mathcal{D}}{\mathbb{P}_2} \arrow[l, "P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}"]
\end{tikzcd}$$

Uit dit diagram lezen we af dat voor willekeurige $\underline{p} \in \mathbb{P}_1$ geldt $\left[T(\underline{p})\right]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}\, G\, P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} \left[\underline{p}\right]_{\mathcal{A}}$

Tevens geldt voor die willekeurige $\underline{p} \in \mathbb{P}_1$ dat

$$\left[T(\underline{p})\right]_{\mathcal{B}} = F\left[\underline{p}\right]_{\mathcal{A}}$$

Dit impliceert dat: $F = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}\, G\, P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$

$$\left(\text{of: } F P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}\, G\right)$$

d/ Neem: $\varphi_1(t) = 1$

$$\varphi_2(t) = t - \frac{\langle t,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\, 1 = t - \frac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt} \cdot 1 = t - 1/2$$

$$\varphi_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\, 1 - \frac{\langle t^2, t-1/2\rangle}{\langle t-1/2, t-1/2\rangle}(t-1/2)$$

$$= t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1 1\,dt} - \frac{\int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2\,dt}{\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,dt}(t - 1/2)$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + 1/6$$

Nu is $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ een orthog. basis van $\mathbb{P}_2$.

e/ De orthog. proj. van $\varphi(t)=t^3$ op $\mathbb{P}_1$ is

$$\frac{\langle \varphi(t),\varphi_1(t)\rangle}{\langle\varphi_1(t),\varphi_1(t)\rangle}\varphi_1(t)+\frac{\langle\varphi(t),\varphi_2(t)\rangle}{\langle\varphi_2(t),\varphi_2(t)\rangle}\varphi_2(t)$$

$$=\frac{\int_0^1 t^3\,dt}{\int_0^1 1\,dt} + \frac{\int_0^1 t^4-\frac{1}{2}t^3\,dt}{\int_0^1 t^2-t+\frac{1}{4}\,dt}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3/40}{1/12}\left(t-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{9}{10}\left(t-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{10}t-\frac{1}{5}$$

Opg. 7: a/ $A$ heeft eigenwaarde $\lambda=1 \iff P_A(1)=0$

Bereken derhalve:

$$P_A(1)=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & \alpha-1 & -9\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=4.(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & \alpha-1\end{vmatrix}$$

$$=4(\alpha-1-9)=4(\alpha-10)$$

Nu volgt: $A$ heeft eigenw. $\lambda=1 \iff \alpha=10$

b/ $\alpha=2$, dus $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ en

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3 & -1\\ 3 & 2-\lambda & -9\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-1)^6\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\left((2-\lambda)^2-9\right)=(5-\lambda)^2(-\lambda-1)$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda=-1$ (alg. mult $=1$) en $\lambda=5$ (alg. mult $=2$)

Vervolgens bepalen we $\dim(E_5)$, omdat $\lambda=5$ een meervoudige eigenwaarde is.

Los daartoe op $A\underline{x}=5\underline{x}$, dus we moeten beschouwen

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-3 & 3 & -1 & 0\\ 3 & -3 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\overset{+1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-3 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Nu zien we dat $A\underline{x} = 5\underline{x}$ 1 vrije variabele heeft, dus $\dim(E_5) = 1$. Bijgevolg is A niet diagonaliseerbaar want de alg. multipliciteit van $\lambda = 5$ is 2.

c/ Juist,

immers voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\lambda = 5$ een eigenwaarde van A. Als nu $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ een eigenvector is van A bij eigenwaarde $\lambda = 5$ dan is $\underline{x}_k = 5^k \underline{x}_0$ $(k \in \mathbb{N})$ de oplossing van het discrete dynamische systeem

$$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (startvector)} \\ \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

De baan van deze oplossing is onbegrensd. $\boxtimes$