Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Woensdag 14 april 2010, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+4)/4, op de gebruikelijke wijze afgerond, geeft het tentamencijfer.
- **Normering:**

Opg. 1a	2	Opg. 2a	1,5	Opg. 3a	2	Opg. 4a	3	Opg. 5a	2	Opg. 6a	3
Opg. 1b	1,5	Opg. 2b	1,5	Opg. 3b	1,5	Opg. 4b	2	Opg. 5b	2	Opg. 6b	2,5
Opg. 1c	1,5	Opg. 2c	1,5					Opg. 5c	2		
Opg. 1d	2							Opg. 5d	2		
								Opg. 5e	2,5		

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & \alpha \end{bmatrix}$ en de vector

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ \beta \end{bmatrix}$ waarbij α, $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de waarde(n) van α en β waarvoor het stelsel lineaire vergelijkingen $A\,\underline{x} = \underline{b}$ strijdig is.

   (b) Bewijs of weerleg: Als $\alpha \neq 4$ zijn de kleinste-kwadraten-oplossingen van $A\,\underline{x} = \underline{c}$ gelijk aan de (gewone) oplossingen van $A\,\underline{x} = \underline{c}$ voor elke vector $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$.

   Voor de volgende twee onderdelen nemen we $\alpha = 4$.

   (c) Bepaal een basis van $NUL(A)$.

   (d) Bepaal, **zonder vector $\underline{d}$ uit te rekenen,** de algemene oplossing van $A\,\underline{x} = \underline{d}$ als $\underline{d} = 2\underline{a}_1 - \underline{a}_3$, waarbij $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2, ..., \underline{a}_5$ de resp. kolommen van matrix A zijn.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

   (a) **Bewering 1:** De afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met voorschrift $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -5 \end{bmatrix}$, dus de orthogonale projectie op de lijn $x_2 = -5$, is een lineaire afbeelding.

   (b) **Bewering 2:** Als A een matrix is met orthogonale kolommen dan is $A^T A$ een diagonaalmatrix.

   (c) **Bewering 3:** Matrix $B = \begin{bmatrix} \beta & -4 \\ -9 & \beta \end{bmatrix}$ is voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ (reëel) diagonaliseerbaar.

3. Van lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven dat $S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{13} \\ \frac{46}{13} \end{bmatrix}$ en $S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{13} \\ -\frac{7}{13} \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal de standaardmatrix van lineaire afbeelding S.

   (b) Lineaire afbeelding S is een spiegeling (dit behoeft niet te worden aangetoond).
   Geef een vergelijking van de spiegelas van S.

4. Beschouw de "puntenwolk" : $[0, 1]$, $[1, 6]$, $[4, 3]$ en $[9, 12]$ in het (x,y)-vlak.

   (a) Bepaal de lijn van de vorm $y = \beta_1 + \beta_2\, x$ die bij deze "puntenwolk" het best aansluit volgens de kleinste-kwadratenmethode.

   (b) Als de kromme van de vorm $y = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{x}$ wordt gezocht die, volgens de kleinste-kwadratenmethode, optimaal aansluit bij de gegeven "puntenwolk" vinden we $y = 1 + 3\sqrt{x}$. Is deze benadering beter dan de benadering die gevonden is in het vorige onderdeel of slechter? Geef een duidelijke motivering van je antwoord.

5. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = \dfrac{d}{dt}(t\,p(t)) - 2\,p(t)$. Tevens is basis $\mathcal{B} = \left\{1 + t,\, t - 1,\, t^2 - t\right\}$ voor vectorruimte $\mathbb{P}_2$ gegeven.

   (a) Toon aan dat afbeelding T lineair is.

   (b) Bepaal een basis van $NUL(T)$ en een basis van $R(T)$, de beeldruimte van T.

(c) Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$, de $\mathcal{B}-$ matrix van T.

(d) Naast basis $\mathcal{B}$ wordt een tweede basis $\mathcal{C}$ op $\mathbb{P}_2$ gegeven. Bereken $[T(q(t))]_{\mathcal{B}}$ als $[q(t)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(e) Op $\mathbb{P}_2$ wordt het inprodukt met voorschrift $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) dt$ gedefinieerd. Bepaal een polynoom $r(t) \in \mathbb{P}_2$, **ongelijk aan het nulpolynoom**, z.d.d. $r(t) \perp s(t)$ voor elke $s(t) \in Span\left\{t,\, t - t^2\right\}$.

6. Gegeven is de $3 \times 3-$ matrix $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ \gamma - 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ waarbij $\gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Voor welke waarde(n) van γ zijn alle eigenwaarden van matrix C reëel?

(b) We nemen $\gamma = 0$ en beschouwen het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (een startvector uit } \mathbb{R}^3) \\ \underline{x}_{k+1} = (C - I_3)\, \underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Hoe moet startvector $\underline{x}_0$ worden gekozen opdat dit systeem convergent is.
(N.B. Uiteraard staat I_3 voor de $3 \times 3-$ eenheidsmatrix)