Uitwerking

Opg. 1 a/ Beschouw

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & \alpha & \beta \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & \alpha & \beta-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & \alpha & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-3 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-3 & \beta-1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-4 & \beta-3 \end{array}\right]$$

Nu volgt:
$A\underline{x} = \underline{b}$ is strijdig
$\Longleftrightarrow$ $\alpha = 4$ en $\beta \neq 3$

b/ Waar,
immers als $\alpha \neq 4$ heeft matrix A in elke rij een pivotpositie (zie de uitwerking van onderdeel a/). Dit impliceert dat het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{c}$ voor elke $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ oplosbaar is en bijgevolg is er geen onderscheid tussen oplossingen en kleinste-kwadraten-oplossingen. ☒

c/ We nemen $\alpha = 4$ en gebruiken de veegresultaten van onderdeel a/, dus we gaan verder met:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_5 \\ x_3 \text{ en } x_5 \text{ zijn vrij} \\ x_4 = -x_5 \end{array}\right.$$

Dus $\underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt:

$\text{NUL}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is

een basis van $\text{NUL}(A)$

d/ Een particuliere oplossing van $A\underline{x} = \underline{d}$ is $\underline{x}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

De algemene oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ is $\underline{x}_h = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (zie onderdeel c/)

De algemene oplossing van $A\underline{x} = \underline{d}$ is dus:

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Opg. 2 a/ Onjuist,
immers $T(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$

b/ Juist,
immers A^TA is een goed gedefinieerde vierkante matrix met op de positie (i, j), dus in rij i en in kolom j, het produkt van de i^{de} rij van A^T en de j^{de} kolom van A. Dit produkt is identiek aan het inprodukt van i^{de} en j^{de} kolom van A. Omdat A orthogonale kolommen heeft is dit inprodukt gelijk aan 0 als $i \neq j$.
Dit betekent dat de coëfficiënten van A^TA buiten de hoofddiagonaal gelijk aan 0 zijn en A^TA dus een diagonaalmatrix is. $\boxtimes$

c/ Juist, immers $p_B(\lambda) = (\beta - \lambda)^2 - 36$
Dus $p_B(\lambda) = 0 \iff \beta - \lambda = 6$ of $\beta - \lambda = -6$
$\iff \lambda = \beta - 6$ of $\lambda = \beta + 6$
Voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ heeft 2×2-matrix B dus twee verschillende reële eigenwaarden, nl. $\lambda = \beta - 6$ en $\lambda = \beta + 6$. Hieruit volgt dat B voor elke $\beta \in \mathbb{R}$ diagonaliseerbaar is $\boxtimes$

Opg. 3 a/ $S\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = S\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}S\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) + \frac{3}{5}S\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-9/13\\46/13\end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix}-17/13\\-7/13\end{bmatrix} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix}-60\\25\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}-12\\5\end{bmatrix}$

$S\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = S\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}S\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) - \frac{2}{5}S\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-9/13\\46/13\end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix}-17/13\\-7/13\end{bmatrix} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix}25\\60\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}5\\12\end{bmatrix}$

De gevraagde standaardmatrix is dus $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-12 & 5\\5 & 12\end{bmatrix}$

b/ De spiegelas van S is de eigenruimte E_1, los derhalve op $S(\underline{x}) = \underline{x}$

Beschouw daartoe $\left[\begin{array}{cc|c}-25/13 & 5/13 & 0\\5/13 & -1/13 & 0\end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases}x_1 = \frac{1}{5}x_2\\x_2 \text{ is vrij}\end{cases}$

De spiegelas is derhalve $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right\}$

Opg. 4 a/ Invullen van de data geeft:

$\begin{cases}\beta_1 = 1\\\beta_1 + \beta_2 = 6\\\beta_1 + 4\beta_2 = 3\\\beta_1 + 9\beta_2 = 12\end{cases} \Longleftrightarrow A\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix} = \underline{b}$ waarbij

$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 4\\1 & 9\end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix}1\\6\\3\\12\end{bmatrix}$

Dit lineaire stelsel vergelijkingen is strijdig dus los op: $A^TA\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix} = A^T\underline{b} \Longleftrightarrow$

$\begin{bmatrix}4 & 14\\14 & 98\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\126\end{bmatrix} \Longrightarrow \beta_1 = 2$ en $\beta_2 = 1$

De gevraagde lijn is derhalve $y = 2 + x$

b/ De kleinste-kwadratenfout is gelijk aan

$\|\underline{b} - \hat{\underline{b}}\| = \|\underline{b} - A\,\underline{x}_{kko}\|$.

De kleinste-kwadratenfout behorend bij de gevonden lijn uit onderdeel a/ is:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

De kleinste-kwadratenfout behorend bij de gegeven kromme uit onderdeel b/ is:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

De gevonden lijn uit onderdeel a/ is dus een betere benadering (in de zin van de kleinste-kwadratenmethode) dan de gegeven kromme uit onderdeel b/ omdat de bijbehorende kleinste-kwadratenfout in dat geval kleiner is.

Opg. 5 a/ - Zij $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$, dan geldt:

$$T(p(t)+q(t)) = \frac{d}{dt}\left(t(p(t)+q(t))\right) - 2(p(t)+q(t))$$
$$= p(t)+q(t)+t(p'(t)+q'(t)) - 2p(t) - 2q(t)$$
$$= p(t)+tp'(t)-2p(t)+q(t)+tq'(t)-2q(t)$$
$$= \frac{d}{dt}(tp(t)) - 2p(t) + \frac{d}{dt}(tq(t)) - 2q(t)$$
$$= T(p(t)) + T(q(t))$$

Sneller: $T(p(t)+q(t)) = \frac{d}{dt}(tp(t)+tq(t)) - 2(p(t)+q(t)) = \frac{d}{dt}(tp(t)) + \frac{d}{dt}(tq(t)) - 2p(t) - 2q(t) = T(p(t)) + T(q(t))$

- Zij $p(t) \in \mathbb{P}_2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt:

$$T(\alpha p(t)) = \frac{d}{dt}\left(t(\alpha p(t))\right) - 2(\alpha p(t))$$
$$= \alpha p(t) + t\alpha p'(t) - 2\alpha p(t)$$
$$= \alpha(p(t)+tp'(t)) - \alpha 2p(t)$$
$$= \alpha \frac{d}{dt}(tp(t)) - \alpha 2p(t) = \alpha\left(\frac{d}{dt}(tp(t)) - 2p(t)\right)$$
$$= \alpha T(p(t)) \quad \boxtimes$$

$T(\alpha p(t)) = \frac{d}{dt}(t\alpha p(t)) - 2(\alpha p(t)) = \alpha \frac{d}{dt}(tp(t)) - \alpha 2p(t) = \alpha T(p(t))$

b/ Zij $p(t) = a+bt+ct^2 \in \mathbb{P}_2$, dan geldt:

$$T(p(t)) = \frac{d}{dt}(at+bt^2+ct^3) - 2(a+bt+ct^2)$$
$$= a+2bt+3ct^2-2a-2bt-2ct^2$$
$$= -a+ct^2$$

Hieruit volgt $R(T) = \text{Span}\{1, t^2\}$ en $\{1, t^2\}$ is een basis van $R(T)$

Dit impliceert bovendien: $T(p(t)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \text{ is willekeurig} \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p(t) = bt \text{ met } b \in \mathbb{R}$$

Dit betekent dat $NUL(T) = \operatorname{Span}\{t\}$ en $\{t\}$ is een basis van $NUL(T)$

c/ $T(1+t) = \frac{d}{dt}(t+t^2) - 2(1+t) = 1+2t-2-2t = -1$

$= -\frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}(t-1) \Rightarrow [T(1+t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(t-1) = \frac{d}{dt}(t^2-t) - 2(t-1) = 2t-1-2t+2 = 1$

$= \frac{1}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(t-1) \Rightarrow [T(t-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(t^2-t) = \frac{d}{dt}(t^3-t^2) - 2(t^2-t) = 3t^2-2t-2t^2+2t = t^2$

$= \frac{1}{2}(1+t) + \frac{1}{2}(t-1) + (t^2-t) \Rightarrow [T(t^2-t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nu volgt:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(1+t)]_{\mathcal{B}} \; [T(t-1)]_{\mathcal{B}} \; [T(t^2-t)]_{\mathcal{B}} \right] = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d/ Er geldt:

$$[\varphi(t)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}} [\varphi(t)]_{\mathcal{C}} = P^{-1}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\varphi(t)]_{\mathcal{C}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \left(\text{dus } \varphi(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t^2\right)$$

Nu volgt:

$$[T(\varphi(t))]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\varphi(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$\left(\text{Dus } T(\varphi(t)) = \frac{1}{3}t^2\right)$

e/ Schrijf $r(t) = a + bt + ct^2$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dan volgt: $r(t) \perp s(t)$ voor elke $s(t) \in \text{Span}\{t, t-t^2\}$

$\Longleftrightarrow r(t) \perp t$ en $r(t) \perp (t - t^2)$

$\Longleftrightarrow \langle r(t), t \rangle = 0$ en $\langle r(t), t - t^2 \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} at + bt^2 + ct^3 \, dt = 0$ en $\langle r(t), t - t^2 \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow b = 0$ en $\int_{-1}^{1} (a + ct^2)(t - t^2) \, dt = 0$

$\Longleftrightarrow b = 0$ en $\int_{-1}^{1} at - at^2 + ct^3 - ct^4 \, dt = 0$

$\Longleftrightarrow b = 0$ en $-\frac{2}{3} a - \frac{2}{5} c = 0$

$\Longleftrightarrow b = 0$ en $a = -\frac{3}{5} c$

Hieruit volgt $r(t) = c\left(-\frac{3}{5} + t^2\right)$ met $c \in \mathbb{R}$.

Men kan dus bijv. $r(t) = -3 + 5t^2$ nemen

(N.B. $\text{Span}\{t, t - t^2\}^{\perp} = \text{Span}\{-3 + 5t^2\}$,
het orthogonale complement van
$\text{Span}\{t, t - t^2\}$ in $\mathbb{P}_2$)

Opg. 6 a/ $$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ \gamma-5 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & \lambda-2 \\ \gamma-5 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & \lambda-2 \\ \gamma-3 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ \gamma-3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - \gamma)$$

Nu volgt: Alle eigenwaarden zijn reëel
$\Longleftrightarrow$ de discriminant van $\lambda^2 - 2\lambda - \gamma$ is niet negatief $\Longleftrightarrow 4 + 4\gamma \geq 0 \Longleftrightarrow \gamma \geq -1$

b/ $\gamma = 0$, dus $P_C(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$ en de eigenwaarden van C zijn $\lambda = 2$ (2 keer) en $\lambda = 0$ (1 keer)

Bijgevolg zijn de eigenwaarden van $C - I_3$ $\lambda = 1$ (2 keer) en $\lambda = -1$ (1 keer). Nu volgt:

Het gegeven discr. dyn. systeem is convergent
$\Longleftrightarrow \underline{x}_0 \in E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$