Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Woensdag 21 januari 2009, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- De normering vindt u na de opgaven.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Het eindresultaat ontstaat na verrekening van de score van de tussentoets.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3\alpha \\ 7 & 2\alpha+14 & 43-7\alpha \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 40 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal voor welke waarde(n) van α het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ strijdig is.

b. Bepaal $\dim(NUL(A))$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. Neem $\alpha = 2$ en geef een relatie waaraan de kentallen c_1, c_2 en c_3 van vector $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$ moeten voldoen als het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar is.

2. **Bewijs of weerleg** de volgende drie beweringen:

a. **Bewering 1**: Als A een $m \times n-$ matrix is, $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ een oplossing is van $A\underline{x} = \underline{0}$ en $\underline{q} \in \mathbb{R}^n$ een oplossing is van $A\underline{x} = \underline{c}$, dan is $\alpha\underline{p} + \underline{q}$ voor **elke** $\alpha \in \mathbb{R}$ een oplossing van $A\underline{x} = \underline{c}$.

b. **Bewering 2**: Als A en B $n \times n-$ matrices zijn, dan geldt $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c. **Bewering 3**: Verzameling $W = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 | p(0) = 1\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{P}_2$.

3. Gegeven is $m \times 4-$ matrix $A = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3\ \underline{a}_4]$ waarbij $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 50 \end{bmatrix}$.

a. Bereken $\|\underline{a}_4\|$.

b. Bereken de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van $A\underline{x} = \underline{b}$ als $\underline{b}$ loodrecht staat op **elke** kolom van A (dus $\underline{b} \in COL(A)^{\perp}$).

4. Een zeker experiment levert de volgende data:

t	0	1	2	3
y	2	3	3	4

. Bereken door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode α, β en γ zodanig dat de grafiek van de kromme $y = \alpha + \beta(t-1)^2 + \gamma \sin(\frac{\pi}{2} t)$ zo goed mogelijk aansluit bij de gegeven data.

5. Door voor te schrijven $T(t) = 13t^2 + 5t + 2$, $T(2t^2 + t) = 12t^2 + 5t + 3$ en $T(t^2 + 1) = 7t^2 + 3t + 2$ wordt de lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gedefinieerd. Bovendien worden $\mathcal{B} = \{t, 2t^2 + t, t^2 + 1\}$ en $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}$ als bases op $\mathbb{P}_2$ gegeven.
   a. Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$, de $\mathcal{B}-$ matrix van T.
   b. Bepaal de overgangsmatrix $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$.
   c. Geef een verband tussen de representatiematrices $[T]_{\mathcal{B}}$ en $[T]_{\mathcal{A}}$ en de overgangsmatrices $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ en $P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}$ (beargumenteer dit verband duidelijk).
   Vervolgens wordt op $\mathbb{P}_2$ het inprodukt met voorschrift $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ gedefinieerd.
   d. Construeer, uitgaande van basis $\mathcal{B}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een **orthogonale** basis $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$van $\mathbb{P}_2$.
   (N.B. $\mathbb{P}_n$ is de vectorruimte van alle reële polynomen van graad $\leq n$)

6. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.
   a. Bereken de eigenwaarden van A.
   b. Ga na of matrix A diagonaliseerbaar is.
   c. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$ en gebruik deze diagonalisatie (eigenwaardendecompositie) van A om A^n voor $n \in \mathbb{N}$ te bepalen.
   d. We beschouwen vervolgens het discrete dynamische systeem:
   $$\begin{cases} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   . Bepaal de oplossing van dit discrete dynamische systeem.
   e. Geef aan hoe startvector $\underline{x}_0$ moet worden gekozen opdat het discrete dynamische systeem
   $$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ is een startvector uit } \mathbb{R}^3 \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   convergent is.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	1.5	Opg. 3a	2	Opg. 4	3	Opg. 5a	2	Opg. 6a	1.5
Opg. 1b	2	Opg. 2b	1.5	Opg. 3b	2.5			Opg. 5b	2	Opg. 6b	2
Opg. 1c	2	Opg. 2c	1.5					Opg. 5c	2	Opg. 6c	3
								Opg. 5d	2.5	Opg. 6d	1.5
										Opg. 6e	1.5