Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Vrijdag 1 februari 2008, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- De normering vindt u na de opgaven.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Het eindresultaat ontstaat na verrekening van de score van de tussentoets.

---

1. Gegeven is dat de aangevulde matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen, 3 vergelijkingen met 5 variabelen, kan worden geveegd naar de volgende echelonvorm: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 17 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^2+9\alpha-18 & -2\alpha+12 \end{array}\right]$.
   Hierbij is α een reële constante.

   (a) Voor welke waarde(n) van α is dit lineaire stelsel strijdig?

   (b) Neem $\alpha = 6$ en geef de oplossing van het lineaire stelsel **in parametervorm**.

   (c) Bepaal $\beta \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ \beta \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -16 \\ \beta \end{bmatrix} \right\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

2. Bewijs of weerleg (d.m.v. een tegenvoorbeeld of een redenering die duidelijk maakt dat de bewering niet klopt) de volgende drie beweringen:

   (a) **Bewering 1:** Als A een $m \times n-$ matrix is en $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{R}^n$ beide oplossing zijn van het homogene lineaire stelsel $A\,\underline{x} = \underline{0}$ dan is voor elke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ook $\alpha\,\underline{p} + \beta\,\underline{q}$ (dus elke lineaire combinatie van $\underline{p}$ en $\underline{q}$) een oplossing van $A\,\underline{x} = \underline{0}$.

   (b) **Bewering 2:** Als A en B twee $n \times n-$ matrices zijn en B **niet inverteerbaar** is, dan geldt $|A + B| = |A|$.

   (c) **Bewering 3:** De verzameling $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3 \right\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

z.o.z.

3. **a.** Bereken door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode α, β en γ zodanig dat de

grafiek van $h(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2$ zo goed mogelijk aansluit bij de volgende punten:

t	0	1	2	3
h	2	1	0	1

b. In $\mathbb{R}^4$ wordt de lineaire deelruimte $U = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$

gegeven. Ontbind vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in een vector $\underline{u} \in U$ en een vector $\underline{v}$, die loodrecht

staat op alle vectoren in U, zodanig dat $\underline{b} = \underline{u} + \underline{v}$.

4. Bereken de determinant van matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 5 & 2c_1 - 3a_1 & 2c_2 - 3a_2 & 2c_3 - 3a_3 \end{bmatrix}$

als van matrix $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ bekend is dat $|A| = 4$.

5. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = p(t) + (1 - \frac{1}{2}\, t^2)\, p''(t)$. Uiteraard staat $p''(t)$ voor de tweede afgeleide van $p(t)$ naar t. Bovendien wordt in $\mathbb{P}_2$ de basis $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t,\, 1+t+t^2\}$ gegeven en is op $\mathbb{P}_2$ het inprodukt met voorschrift $\langle f,\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) dt$ gedefinieerd.

   (a) Toon aan dat afbeelding T lineair is.

   (b) Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{B}$-matrix van lineaire afbeelding T)

   (c) Construeer, uitgaande van basis $\mathcal{B}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een **orthogonale** basis van $\mathbb{P}_2$.

6. We beschouwen de matrix $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Voor welke waarde(n) van α heeft matrix A de eigenwaarde -2?

   (b) Neem $\alpha = 0$ en ga na of A (reeël) diagonaliseerbaar is.

7. Gegeven zijn de matrix $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ en het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{7}{4} \end{bmatrix} \\ \underline{x}_{k+1} = D\,\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$.

   Geef de oplossing van dit discrete dynamische systeem en bereken $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

1. NORMERING:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	3	Opg. 4	$2\frac{1}{2}$	Opg. 5a	2	Opg. 6a	$2\frac{1}{2}$	Opg
Opg. 1b	2	Opg. 2b	2	Opg. 3b	$3\frac{1}{2}$			Opg. 5b	2	Opg. 6b	$2\frac{1}{2}$	
Opg. 1c	$2\frac{1}{2}$	Opg. 2c	2					Opg. 5c	$2\frac{1}{2}$			

EINDE