Uitwerking

Opg 1 a/ Het lineaire stelsel is strijdig $\Longleftrightarrow$

$$-\alpha^2 + 9\alpha - 18 = 0 \quad \text{en} \quad -2\alpha + 12 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$-(\alpha-3)(\alpha-6) = 0 \quad \text{en} \quad -2(\alpha-6) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\alpha = 3$$

b/ Subst. $\alpha = 6$ in de gegeven echelonmatrix, dat geeft:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 17 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \uparrow_{-2} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -9 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1) \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -9 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu volgt:

$$\begin{cases} x_1 = 23 - 2x_2 + 9x_4 - 11x_5 \\ x_3 = 4 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_2, x_4, x_5 \text{ zijn vrij} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met $x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

c/ Beschouw de matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & \beta & -16 \\ 3 & -9 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{+2,\ -3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & \beta-6 & -18 \\ 0 & 0 & \beta+3 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt:

Het gegeven drietal vectoren is een basis van $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ de gegeven 3 vectoren zijn onafhankelijk

$\Leftrightarrow$ elke kolom van $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & \beta & -16 \\ 3 & -9 & \beta \end{bmatrix}$ heeft een pivotpositie

$\Leftrightarrow$ $\beta \neq 6$ en $\beta \neq -3$

Opg 2 a/ Waar, immers $A(\alpha \underline{p} + \beta \underline{q}) = \alpha A\underline{p} + \beta A\underline{q}$
$= \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

b/ Onwaar, want neem bijv. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (dan is B niet inverteerbaar)

dan volgt: $|A| = -2$ en $|A+B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$

Dus $|A+B| \neq |A|$

c/ Onwaar, want bijv. $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in W$ maar

$-2\underline{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \notin W$. Dus W is niet gesloten

t.a.v. het scalaire produkt en bijgevolg is

W geen Lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$

Opg 3 a) Substitutie van de punten geeft:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 9\gamma = 1 \end{cases}$$

In matrixvorm wordt dit $A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \underline{b}$

waarbij $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

We lossen vervolgens op: $A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = A^T \underline{b}$

Beschouw daarom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 4 \\ 6 & 14 & 36 & 4 \\ 14 & 36 & 98 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{vegen}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 15 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt: $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{19}{10}$ en $\alpha = \frac{21}{10}$

De gezochte functie is dus

$$h(t) = \frac{21}{10} - \frac{19}{10} t + \frac{1}{2} t^2$$

b We construeren eerst een orthogonale basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ uit basis $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ in } U$$

Neem daartoe $\underline{b}_1 = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_2 = \underline{a}_2 - \left(\frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = 2\,\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \left(\frac{\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 - \left(\frac{\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{10}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{30}{20}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vervolgens geldt:

$$\underline{u} = \left(\frac{\underline{b} \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{b} \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{b} \cdot \underline{b}_3}{\underline{b}_3 \cdot \underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{-4}{20}\right)\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 21 \\ 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

en $\underline{v} = \underline{b} - \underline{u} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opg. 4

$$|B| = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 - 3a_1 & 2c_2 - 3a_2 & 2c_3 - 3a_3 \end{vmatrix} \overset{+3}{\downarrow} =$$

ontwikkel naar rij 1

$$2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4|A| = -16$$

haal factor 2 uit rij 3

Opg. 5 a/ *) Zij $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$ dan geldt $T(p(t)+q(t))$

$$= (p(t)+q(t)) + (1-\tfrac{1}{2}t^2)(p(t)+q(t))''$$
$$= p(t)+q(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)(p''(t)+q''(t))$$
$$= p(t)+q(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)p''(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)q''(t)$$
$$= p(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)p''(t)+q(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)q''(t)$$
$$= T(p(t)) + T(q(t))$$

*) Zij $p(t) \in \mathbb{P}_2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ dan geldt

$$T(\alpha p(t)) = \alpha p(t) + (1-\tfrac{1}{2}t^2)(\alpha p(t))''$$
$$= \alpha p(t) + (1-\tfrac{1}{2}t^2)(\alpha p''(t))$$
$$= \alpha p(t) + \alpha(1-\tfrac{1}{2}t^2)p''(t)$$
$$= \alpha\left(p(t)+(1-\tfrac{1}{2}t^2)p''(t)\right) = \alpha T(p(t))$$

$\boxtimes$

b/ $T(1)=1 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$T(1+t) = 1+t \Rightarrow [T(1+t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$T(1+t+t^2) = 1+t+t^2+(1-\tfrac{1}{2}t^2)2 = 3+t$

$\Rightarrow [T(1+t+t^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

Dus $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

c/ $q_1(t) = 1$

$$q_2(t) = 1+t - \frac{\langle 1+t, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 = 1+t - \frac{\int_{-1}^{1} 1+t\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\,dt}1$$
$$= 1+t-\frac{2}{2}.1 = t$$

$$q_3(t) = 1+t+t^2 - \frac{\langle 1+t+t^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}.1 - \frac{\langle 1+t+t^2, t\rangle}{\langle t,t\rangle}t$$
$$= 1+t+t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} 1+t+t^2\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\,dt}.1 - \frac{\int_{-1}^{1} t+t^2+t^3\,dt}{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}t$$
$$= 1+t+t^2 - \frac{2+2/3}{2} - \frac{2/3}{2/3}t = -1/3 + t^2$$

Dus $\{1, t, t^2-\tfrac{1}{3}\}$ is een orthog. basis van $\mathbb{P}_2$.

pg. 6 a) Er geldt:

A heeft eigenwaarde $-2 \iff \left| A - (-2) I_3 \right| = 0$

Beschouw derhalve:

$$\left| A - (-2) I_3 \right| = \left| A + 2 I_3 \right| = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} \uparrow_{-1} \uparrow_{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha-2 & 5 & 0 \\ -3 & \alpha+6 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-2 & 5 \\ -3 & \alpha+6 \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha+6)+15$$

ontwikkel naar kolom 3

$$= \alpha^2 + 4\alpha + 3 = (\alpha+3)(\alpha+1)$$

Nu volgt: A heeft eigenw. $-2 \iff \alpha = -3$ of $\alpha = -1$

b) $\alpha = 0$, dus $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \downarrow^{-1}$$

$\xrightarrow{+1}$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

ontwikkel naar rij 2

$$= -(1+\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = (1+\lambda)^2 (1-\lambda)$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda = -1$ (alg. mult. $= 2$) en $\lambda = 1$ (alg. mult $= 1$)

Er geldt: A is diagonaliseerb. $\iff \dim(E_{-1}) = 2$

Los derhalve op: $A\underline{x} = -\underline{x}$

Daartoe beschouwen we $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \downarrow^{-1} \downarrow^{-4} \longrightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \end{array}\right]$. Hieruit volgt dat het lineaire stelsel $A\underline{x} = -\underline{x}$ slechts 1 vrije var. heeft en dat $\dim(E_{-1}) = 1$. Bijgevolg is A niet diag. als $\alpha = 0$.

Opg. 7 De eigenwaarden van D zijn $\lambda = 1$ (alg. mult. $= 2$) en $\lambda = \frac{1}{2}$ (alg. mult $= 1$)

De eigenruimten van D zijn:

$$E_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}\right\} \text{ en } E_{\frac{1}{2}} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Schrijf vervolgens:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -7/4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan volgt:

$$\underline{x}_k = D^k \underline{x}_0 = D^k\left(-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} D^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} D^k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} 1^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit geeft vervolgens:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{3} 1^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -2 \end{bmatrix}$$