Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Dinsdag 19 juli 2007, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 2 punten waard.
- Het getal (score+4)/4, op de gebruikelijke wijze afgerond, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven zijn matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ (met $\alpha \in \mathbb{R}$) en vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal voor welke waarde(n) van α geldt $\underline{b} \in COL(A)$.

   (b) Bepaal voor welke waarde(n) van α geldt dat het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar is voor **elke** $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$.

   (c) Ga na of α zodanig kan worden gekozen dat geldt $NUL(A) = COL(A)$.(Geef een duidelijke argumentatie).

2. Bewijs of weerleg de volgende 3 beweringen:

   (a) Als A_n de $n \times n-$ matrix is van de vorm $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (er staan enen op de 2 nevendiagonalen direkt onder en boven de hoofddiagonaal), dan geldt A_n is inverteerbaar voor elke $n \geq 2$.

   (b) Als $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat $\left\|\underline{x} + \underline{y}\right\| = \left\|\underline{x} - \underline{y}\right\|$ dan geldt $\underline{x} \perp \underline{y}$.

   (c) Als A een $5 \times 5-$ matrix is en $|A| = 7$ dan volgt $\left|-(A^T)^{-1}\right| = \frac{1}{7}$.

3. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de lineaire deelruimte W door $W = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$ en vector $\underline{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}$.

   (a) Bereken m.b.v. het Gram-Schmidt-proces, uitgaande van $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, een orthogonale basis van W.

   (b) Ontbind $\underline{v}$ in een component $\underline{w} \in W$ en een component $\underline{u}$ die loodrecht staat op **elke** vector in W.

   (c) Bepaal een orthonormale basis van $W^{\perp}$.

4. In het $xy-$ vlak zijn de vier punten $[-2,\,3]$, $[-1,\,1]$, $[1,\,1]$ en $[2,\,5]$ gegeven. Bepaal α en β zodanig dat de parabool met vergelijking $y = \alpha x^2 + \beta x$ zo goed mogelijk aansluit bij de gegeven vier punten in de zin van de kleinste-kwadraten-methode.

5. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = t\,p^{\prime}(t) + p(0)\,(t + t^2)$, hierbij staat uiteraard $p^{\prime}(t)$ voor de afgeleide van $p(t)$ naar t.

   (a) Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.

   (b) Bepaal een basis van $NUL(T)$ (de nulruimte van T) en van $\mathcal{R}(T)$ (de beeldruimte/range van T). Hint: polynomen uit $\mathbb{P}_2$ kunnen worden geschreven in de vorm $p(t) = a + bt + ct^2$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (c) Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ als $\mathcal{B} = \left\{1,\, 1+t,\, t+t^2\right\}$.

   (d) Op vectorruimte $\mathbb{P}_2$ wordt vervolgens het inprodukt met voorschrift $\langle h, g\rangle =_{-1}^{1} h(t)g(t)dt$ gedefinieerd. Bovendien wordt het polynoom $q(t) = 1 + \beta t + \alpha t^2$, waarbij $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, gegeven. Bepaal α en β zodanig dat polynoom $q(t)$ loodrecht staat op **elk** polynoom uit $Span\left\{t,\, 1 - t^2\right\}$.

6. Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix}3 & 0 & \alpha\\1 & 1 & -2\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}$ (met $\alpha \in \mathbb{R}$) en $B = \begin{bmatrix}0 & 1\\-6 & 5\end{bmatrix}$.

   (a) Neem $\alpha = -6$ en ga na of A diagonaliseerbaar is.

(b) We nemen vervolgens $\alpha = -6\frac{1}{4}$ en beschouwen het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ga na of dit dynamische systeem convergent is en, zo ja, bepaal $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

Hint: $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ zijn eigenvectoren van A.

(c) Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $B = PDP^{-1}$.

(d) Bereken B^n waarbij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig is.