Uitwerking.

Opg. 1 a) Er geldt: $\underline{b} \in \mathrm{COL}(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar

Beschouw dus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \alpha & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} +2 \\ \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \alpha & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-1 & 0 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $\underline{b} \in \mathrm{COL}(A) \iff \alpha \in \mathbb{R}$

b) $A\underline{x} = \underline{c}$ is oplosbaar voor elke $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$ precies dan als elke rij van A een pivot-positie heeft. Uit onderdeel a) volgt dat dit het geval is als $\alpha \neq \frac{1}{2}$

c) Nee, want stel $\mathrm{NUL}(A) = \mathrm{COL}(A)$. Dan volgt $\dim(\mathrm{NUL}(A)) = \dim(\mathrm{COL}(A)) = \mathrm{rang}(A)$. M.b.v. het Rangtheorema kan dan worden geconcludeerd $\dim(\mathrm{NUL}(A)) = \dim(\mathrm{COL}(A)) = 1\frac{1}{2}$. Dit leidt tot een tegenspraak daar de dimensie van een vectorruimte een natuurlijk getal is.

Opg. 2 a) Onjuist, want bijv. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ heeft afhankelijke kolommen (immers kolom 1 en 3 zijn gelijk). Uit het I.M.T. volgt dan dat A_3 niet inverteerbaar is. (N.B. deze conclusie kan ook worden getrokken na opgemerkt te hebben dat $|A_3| = 0$)

b) Juist, immers $\|\underline{x}+\underline{y}\| = \|\underline{x}-\underline{y}\|$

$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}-\underline{y}\|^2$

$\Rightarrow (\underline{x}+\underline{y}) \cdot (\underline{x}+\underline{y}) = (\underline{x}-\underline{y}) \cdot (\underline{x}-\underline{y})$

$$\Rightarrow \underline{x}\cdot\underline{x} + \underline{x}\cdot\underline{y} + \underline{y}\cdot\underline{x} + \underline{y}\cdot\underline{y} = \underline{x}\cdot\underline{x} - \underline{x}\cdot\underline{y} - \underline{y}\cdot\underline{x} + \underline{y}\cdot\underline{y}$$

$$\Rightarrow 2(\underline{x}\cdot\underline{y}) = -2(\underline{x}\cdot\underline{y}) \Rightarrow 4(\underline{x}\cdot\underline{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}\cdot\underline{y} = 0 \Rightarrow \underline{x} \perp \underline{y} \qquad \boxtimes$$

c) <u>Onjuist</u>, want $\left|-\left(A^T\right)^{-1}\right| = (-1)^5 \left|\left(A^T\right)^{-1}\right|$

$$= -\frac{1}{|A^T|} = -\frac{1}{|A|} = -\frac{1}{7}$$

<u>Opg. 3</u> a) Definieer $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$ en $\underline{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix}$.

Een orthogonale basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ is dan:

$$\underline{b}_1 = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \left(\frac{\underline{a}_2\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \left(\frac{\underline{a}_3\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 - \left(\frac{\underline{a}_3\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix} - \underline{0} - \left(\frac{-3}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

b) $\underline{w}$ = de orthogonale projectie van $\underline{v}$ op W

$$= \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_3}{\underline{b}_3\cdot\underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \underline{0} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}9\\5\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{w} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\-2\end{bmatrix} - \frac{1}{14}\begin{bmatrix}9\\5\\4\\2\end{bmatrix} = \frac{5}{14}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix}$$

c) <u>Methode 1:</u>

Daar $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$ en $\dim(W) = 3$ volgt $\dim(W^\perp) = 1$.

Bovendien volgt uit onderdeel b) dat $\underline{u} = \frac{5}{14}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix} \in W^\perp$, dus $W^\perp = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix}\right\}$

en $\left\{\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix}\right\}$ is een orthon. basis van $W^\perp$.

<u>Methode 2:</u>

$\underline{x} \in W^\perp \iff \underline{x} \perp \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ en $\underline{x} \perp \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$ en

$\underline{x} \perp \begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{6}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases} \iff \underline{x} = x_4\begin{bmatrix}-1/6\\1/6\\-1/3\\1\end{bmatrix}$ met $x_4 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt: $W^\perp = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix}\right\}$

en $\left\{\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-6\end{bmatrix}\right\}$ is een orthon. basis van $W^\perp$.

<u>Opg. 4</u> Substitutie van de 4 punten in de vergelijking van de parabool geeft:

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 3 \\ \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 2\beta = 5 \end{cases}$$

In matrixvorm staat hier $A\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \underline{b}$ waarbij $A = \begin{bmatrix}4 & -2\\1 & -1\\1 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix}3\\1\\1\\5\end{bmatrix}$

Los vervolgens op: $A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = A^T \underline{b}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha = 1 \text{ en } \beta = \frac{2}{5}$$

De gezochte parabool heeft dus de vergelijking $y = x^2 + \frac{2}{5}x$.

Opg. 5 a) (*) Zij $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$, dan geldt: $T((p+q)(t))$

$= t\,(p+q)'(t) + (p+q)(0)\,(t+t^2)$

$= t\,p'(t) + t\,q'(t) + p(0)(t+t^2) + q(0)(t+t^2)$

$= t\,p'(t) + p(0)(t+t^2) + t\,q'(t) + q(0)(t+t^2)$

$= T(p(t)) + T(q(t))$

(*) Zij $p(t) \in \mathbb{P}_2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt: $T((\alpha p)(t))$

$= t(\alpha p)'(t) + (\alpha p)(0)(t+t^2) = t\alpha p'(t) + \alpha p(0)(t+t^2)$

$= \alpha\,(t\,p'(t) + p(0)(t+t^2)) = \alpha T(p(t))$ $\boxtimes$

b) Zij $p(t) \in \mathbb{P}_2$, dan kan men schrijven $p(t) = a + bt + ct^2$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dan geldt: $T(p(t)) = t(b + 2ct) + a(t+t^2)$

$= (a+b)t + (2c+a)t^2$

Nu volgt:

(I) $p(t) \in \text{NUL}(T) \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -\frac{1}{2}a \\ a \text{ willekeurig uit } \mathbb{R} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow p(t) = a - at - \frac{1}{2}at^2 = a(1 - t - \frac{1}{2}t^2)$ met $a \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow p(t) \in \text{Span}\{1 - t - \frac{1}{2}t^2\}$

Dit betekent dat $\text{NUL}(T) = \text{Span}\{1 - t - \frac{1}{2}t^2\}$ en bijv. $\{1 - t - \frac{1}{2}t^2\}$ is een basis van $\text{NUL}(T)$

(II) $R(T) = \text{Span}\{t, t^2\}$ en bijv. $\{t, t^2\}$ is een basis van $R(T)$.

c) $T(1) = t + t^2$, dus $\left[T(1)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(1+t) = t + t + t^2 = 2t + t^2$, dus $\left[T(1+t)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(t+t^2) = t(1+2t) = t + 2t^2$, dus $\left[T(t+t^2)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Hieruit volgt: $\left[T\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $q(t)$ staat loodrecht op elk polynoom uit $\mathrm{Span}\{t, 1-t^2\} \iff q(t) \perp t$ en $q(t) \perp 1-t^2$

$\iff \langle q(t), t \rangle = 0$ en $\langle q(t), 1-t^2 \rangle = 0$

$\iff \int_{-1}^{1} (1 + \beta t + \alpha t^2)\, t \, dt = 0$ en $\int_{-1}^{1} q(t)(1-t^2)\,dt = 0$

$\iff \beta = 0$ en $\int_{-1}^{1} (1 + \alpha t^2)(1-t^2)\,dt = 0$

$\iff \beta = 0$ en $\int_{-1}^{1} 1 + (\alpha - 1)t^2 - \alpha t^4 \,dt = 0$

$\iff \beta = 0$ en $2 + \frac{2}{3}(\alpha - 1) - \frac{2}{5}\alpha = 0$

$\iff \beta = 0$ en $\alpha = -5$

Het gezochte polynoom is dus $q(t) = 1 - 5t^2$

(N.B. $\{1 - 5t^2\}$ is een basis van het orthogonale complement van $\mathrm{Span}\{t, 1-t^2\}$ in $\mathbb{P}_2$)

<u>Opg. 6</u>

a) Bereken eerst de eigenwaarden van A.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

(Er is ontwikkeld naar kolom 2)

Hieruit volgt dat de eigenwaarden zijn:
$\lambda = 0$ (alg. mult. $= 1$) en $\lambda = 1$ (alg. mult. $= 2$).

Eigenwaarde $\lambda = 1$ is meervoudig en de diagonaliseerbaarheid van A hangt ervan af of $\dim(E_1) = 2$ of $\dim(E_1) = 1$.
Los derhalve op $A\underline{x} = \underline{x}$. Daartoe beschouwen we

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt dat het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{x}$ slechts 1 vrije variabele heeft, hetgeen betekent dat $\dim(E_1) = 1$
De conclusie is dus dat A niet diagonaliseerbaar is, want voor eigenwaarde $\lambda = 1$ is de geometrische multipliciteit kleiner dan de algebraïsche multipliciteit.

b) $A\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

hetgeen betekent dat $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A bij eigenwaarde $\frac{1}{2}$ en dat $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A bij eigenwaarde 1.
Schrijf vervolgens $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
dan volgt: $\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 = 2A^k\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 5A^k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 5 \cdot 1^k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Bereken eerst de eigenwaarden van B.

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

De eigenwaarden van B zijn dus $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$ (beide met algebraïsche multipliciteit 1)
Bepaal vervolgens de eigenruimten:
Bij $\lambda = 2$, los op $A\underline{x} = 2\underline{x}$ en beschouw derhalve $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow E_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

Bij $\lambda = 3$, los op $A\underline{x} = 3\underline{x}$ en beschouw derhalve $\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

Men kan dus nemen $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, dan geldt $B = PDP^{-1}$.

d) Gebruik makend van de diagonalisatie uit onderdeel c) volgt:

$$B^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 3^n - 2^n \\ 6\cdot 2^n - 6\cdot 3^n & 3\cdot 3^n - 2\cdot 2^n \end{bmatrix}$$