Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Vrijdag 2 februari 2007, 14.00-17.00 uur

---

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 2 punten waard.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Het eindresultaat ontstaat na verrekening van de score van de tussentoets.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 13 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

   waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Ga na voor welke waarde(n) van $\beta$ geldt $\underline{b} \in COL(A)$.

   (b) Ga na voor welke waarde(n) van $\beta$ geldt $\underline{b} \in NUL(A)$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

   (c) Geef een afhankelijkheidsrelatie tussen de kolommen van $A$.

2. Bewijs of weerleg de volgende 4 beweringen:

   (a) De afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die vectoren uit $\mathbb{R}^3$ orthogonaal projecteert op het vlak $x_3 = -2$ is een lineaire afbeelding.

   (b) Als $A$ een $n \times n-$ matrix is met de eigenschap dat $A\,\underline{x} = \underline{b}$ oplosbaar is voor elke $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, dan geldt $rang(A^T A) = n$.

   (c) De verzameling $H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha\beta \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^5$.

   (d) Voor willekeurige $n \times n-$ matrices $A$ en $B$ geldt $\left|A^T B\right| = \left|B^T A\right|$.

**Z.O.Z.**

3. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de lineaire deelruimte $W$ door $W = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en vector $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal een basis van $W^{\perp}$.

   (b) Schrijf $\underline{v}$ als $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ waarbij $\underline{w} \in W$ en $\underline{u} \in W^{\perp}$.

4. Een zeker experiment leidt tot de volgende rij van $[v, w]$-data: $\left[-\frac{2}{3}, -3\right]$, $[0, 3]$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ en $[-1, -2]$. Er wordt uitgegaan van een model met de vergelijking $w = \beta_0 + \beta_1 v\, w^2$ waarbij $\beta_0$ en $\beta_1$ reële parameters zijn. Bepaal $\beta_0$ en $\beta_1$ zodanig dat de vergelijking $w = \beta_0 + \beta_1 v\, w^2$ het best past bij de gegeven data volgens de kleinste-kwadraten-methode.

5. Gegeven is vectorruimte $V = \left\{ f : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu} \right\}$, dus $V = C[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, met daarin de lineaire deelruimte $W = Span\{1, \sin(t), \cos(t)\}$. In $W$ zijn de bases $\mathcal{B} = \{1 - 3\sin(t) + 2\cos(t),\ \sin(t) - 3\cos(t),\ -2 + 4\sin(t) + 4\cos(t)\}$ en $\mathcal{C} = \{1, \sin(t), \cos(t)\}$ gegeven. Bovendien wordt de *lineaire* afbeelding $T : W \to W$ met voorschrift $T(f(t)) = f'(t) - f'(0)\sin(t)$ gedefinieerd (uiteraard staan $f'(t)$ en $f'(t)$ resp. voor de tweede afgeleide en eerste afgeleide van $f(t)$ naar $t$, dus bijv. $T(\sin(t)) = \cos(t)$).

   (a) Bepaal een basis van $NUL(T)$ (de nulruimte van $T$) en van $\mathcal{R}(T)$ (de beeldruimte/range van $T$). Hint: schrijf een functie uit $W$ in de vorm $f(t) = a + b\sin(t) + c\cos(t)$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (b) Bepaal de representatiematrix $M$ van $T$ t.o.v. de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.

   (c) Bepaal $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ (de overgangsmatrix van basis $\mathcal{C}$ naar basis $\mathcal{B}$).

   (d) Op vectorruimte $V$ wordt het inprodukt met voorschrift $\langle h, g\rangle =_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(t)g(t)dt$ gedefinieerd. Construeer in $W$, uitgaande van basis $\mathcal{C}'$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een orthogonale basis.

6. Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & \alpha & -\alpha \\ -12 & -2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ en $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal de waarde(n) van $\alpha$ waarvoor $A$ inverteerbaar is.

   (b) Neem $\alpha = 2$ en ga na of $A$ diagonaliseerbaar is.

(c) Bepaal een inverteerbare matrix $P$ en een diagonaalmatrix $D$ zodanig dat $B = PDP^{-1}$.

(d) Gegeven is dat $3 \times 3-$ matrix $C$ een basis van eigenvectoren $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ in $\mathbb{R}^3$ heeft. Bovendien wordt gegeven dat $C$ de eigenwaarden 1 en 0 heeft en de eigenruimten $E_1 = Span\,\{\underline{a}, \underline{b}\}$ en $E_0 = Span\,\{\underline{c}\}$. Bereken $C^{100}$.

**EINDE**