Uitwerking

Opg. 1 a) Er geldt: $\underline{b} \in \mathrm{Col}(A) \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 13 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-5,\ -2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & -34 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{rij 2, 3 en 4}]{\text{verwissel}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & -34 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{-1,\ +4,\ -1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+12 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt: $\underline{b} \in \mathrm{Col}(A) \Leftrightarrow \beta = -12$

b) *) Bereken: $A\underline{b} = \begin{bmatrix} 2+\beta \\ 26+13\beta \\ -4-2\beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Nu volgt: $\underline{b} \in \mathrm{Nul}(A) \Leftrightarrow A\underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \beta = -2$

*) Los op $A\underline{x} = \underline{0}$. Uit onderdeel a) volgt dat de aangevulde matrix $[A \mid \underline{0}]$ kan worden geveegd tot $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Hieruit volgt $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 = 0 \end{cases}$, dus $\underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ met $x_3 \in \mathbb{R}$

Dit betekent dat $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

en $\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis in $\mathrm{Nul}(A)$.

N.B. Ook hieruit volgt: $\underline{b} \in \mathrm{Nul}(A) \Leftrightarrow \underline{b} = \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ voor zekere $\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = -2$

c) Uit het veegproces bij onderdeel a) volgt dat
$kol_3(A) = 3\, kol_1(A) - 2\, kol_2(A)$.
(Afhankelijkheidsrelaties tussen de kolommen veranderen immers niet tijdens het vegen)

N.B. Deze relatie volgt overigens ook uit het feit dat $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in Nul(A)$.
(dit is al in onderdeel b) berekend)

Opg. 2 a) Onwaar, immers $T(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$

b) Waar, want uit het IMT volgt dat beide A en A^T inverteerbare $n \times n$-matrices zijn. Bijgevolg is ook $A^T A$ een inverteerbare $n \times n$-matrix (het produkt van 2 inverteerbare $n \times n$-matrices is immers een inverteerbare $n \times n$-matrix)
Dit betekent dat $A^T A$ n pivotposities heeft en dat $rang(A^T A) = n$

c) Onwaar, want H is niet gesloten t.a.v. de optelling. Neem bijvoorbeeld

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dan geldt $\underline{x} \in H$ $(\alpha = 1, \beta = 2)$
en $\underline{y} \in H$ $(\alpha = 2, \beta = -1)$, maar

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin H$$

(het derde kental zou 3 moeten zijn)

d) Waar, immers $|A^T B| = |A^T|\,|B| =$
$|A|\,|B| = |B|\,|A| = |B^T|\,|A| = |B^T A|$

Opg. 3 a) $\underline{x} \in W^{\perp} \iff \underline{x} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ en $\underline{x} \perp \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 = 0 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Beschouw derhalve: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{+1}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] (\times \frac{1}{2})$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt: $W^{\perp} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

en bijv. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van $W^{\perp}$

b) We construeren eerst m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een orthogonale basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ van W.

Neem: $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-4}{14}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = 7\,\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu volgt:

$$\underline{w} = \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \frac{10}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-3\end{bmatrix} + \frac{34}{238}\begin{bmatrix}-5\\4\\14\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\2\\-2\end{bmatrix}$$

($\underline{w}$ is de orthogonale projectie van $\underline{v}$ op W)

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(uiteraard kan men $\underline{u}$ ook vinden door $\underline{v}$ te projecteren op $W^\perp$)

Opg. 4 Invullen van de meetpunten geeft:

$$\begin{cases} \beta_0 - 6\beta_1 = -3 \\ \beta_0 = 3 \\ \beta_0 + 2\beta_1 = 2 \\ \beta_0 - 4\beta_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = \underline{b} \text{ waarbij}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & -6\\1 & 0\\1 & 2\\1 & -4\end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix}-3\\3\\2\\-2\end{bmatrix}$$

Los vervolgens op $A^TA\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = A^T\underline{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}4 & -8\\-8 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\30\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\beta_0 = 2\beta_1\\ -8\beta_0 + 56\beta_1 = 30\end{cases} \Rightarrow \beta_0 = 3/2$$

$$\Rightarrow 40\beta_1 = 30 \Rightarrow \beta_1 = 3/4$$

De gezochte vergelijking is dus $w = 3/2 + 3/4\, vw^2$

Opg. 5 a) Als $f(t) \in W$, dan kan men schrijven $f(t) = a + b\sin(t) + c\cos(t)$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dan geldt: $f'(t) = b\cos(t) - c\sin(t)$, $f''(t) = -b\sin(t) - c\cos(t)$ en $f''(0) = -c$.

Dus $T(f(t)) = b\cos(t) - c\sin(t) + c\sin t = b\cos(t)$

Hieruit volgt $R(T) = \text{Span}\{\cos(t)\}$ en $\{\cos(t)\}$ is een basis van $R(T)$.

NUL(T) wordt gevonden door op te lossen

$T(f(t)) = 0$ (voor elke $t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$)

$\Rightarrow b\cos(t) = 0$ (" " ")

(als geschreven wordt $f(t) = a + b\sin(t) + c\cos(t)$)

$\Rightarrow b = 0$

Dat betekent $NUL(T) = \text{Span}\{1, \cos(t)\}$ en bijv. $\{1, \cos(t)\}$ is een basis van NUL(T).

b) $T(1 - 3\sin(t) + 2\cos(t)) = -3\cos(t)$

$T(\sin(t) - 3\cos(t)) = \cos(t)$

$T(-2 + 4\sin(t) + 4\cos(t)) = 4\cos(t)$

Dus $M = \left[[-3\cos(t)]_C \; [\cos(t)]_C \; [4\cos(t)]_C \right]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(N.B. Ook hieruit volgen de resultaten van a))

c) $$\underset{B \leftarrow C}{P} = \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

d) $h_1(t) = 1$

$$h_2(t) = \sin(t) - \frac{\overbrace{\langle \sin(t), 1\rangle}^{=0}}{\langle 1, 1\rangle} 1 = \sin(t)$$

$$h_3(t) = \cos(t) - \frac{\langle \cos(t), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \frac{\overbrace{\langle \cos(t), \sin(t)\rangle}^{=0}}{\langle \sin(t), \sin(t)\rangle} \sin(t)$$

$$= \cos(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\,dt = \cos(t) - \frac{1}{\pi} \Big[\sin(t)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \cos(t) - \frac{2}{\pi}$$

Dus $\left\{1, \sin(t), \cos(t) - \frac{2}{\pi}\right\}$ is een orthogonale basis van W.

Opg. 6

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & \alpha & -\alpha \\ -12 & -2\alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[+1]{} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & \alpha & 0 \\ -12 & -2\alpha & \alpha^2 - 2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - 2\alpha)(3\alpha - 6) = 3\alpha(\alpha - 2)^2$$

Nu volgt: A is inverteerbaar $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 2$

b/ $\alpha = 2$, dus $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -12 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ en

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 6 & 2-\lambda & -2 \\ -12 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \downarrow^{-2} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \\ -12 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{+2}{\longleftarrow} =$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -20 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -20 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 9\lambda\right)$$

ontwikkel naar rij 2

$$= -\lambda^2(\lambda - 9)$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda = 0$ (alg. mult = 2) en $\lambda = 9$ (alg. mult = 1)
Het gaat er nu om of E_0 1-dimensionaal of 2-dimensionaal is. Los daarom op: $A\underline{x} = 0\underline{x}$.
We beschouwen daartoe:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ -12 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \downarrow^{-2} \downarrow^{+4} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu zien we dat $A\underline{x} = 0\underline{x}$ twee vrije variabelen heeft, dus $\dim(E_0) = 2$ en bijgevolg is A diagonaliseerbaar

c $$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 4 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \downarrow^{+1} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{-1}{\longrightarrow}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1+\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1+\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

ontwikkel naar rij 2

$$= (\lambda-1)\left(-\lambda^2 + \lambda + 2 - 2\right) = -\lambda\,(\lambda-1)^2$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda = 0$ (alg. mult = 1) en $\lambda = 1$ (alg mult = 2)

Bepaal vervolgens de eigenruimten:

bij $\lambda = 0$

Beschouw: $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \uparrow_{-2} \uparrow_{+1} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \downarrow^{+2}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \uparrow_{+1} \downarrow_{+1} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Hieruit volgt $E_0 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

bij $\lambda = 1$

Beschouw: $\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \downarrow^{+1} \downarrow^{+\frac{1}{2}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Dus $E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Men kan dus nemen $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ en

$D = \begin{bmatrix} 0 & & \ominus \\ & 1 & \\ \ominus & & 1 \end{bmatrix}$

d. Uit hetgeen gegeven is volgt dat C diagonaliseerbaar is en dat $P = [\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & & \ominus \\ & 1 & \\ \ominus & & 0 \end{bmatrix}$ een diagonalisatie van C is.

Dus $C = PDP^{-1}$ en $C^{100} = (PDP^{-1})^{100} =$

$PD^{100}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^{100} & & \ominus \\ & 1^{100} & \\ \ominus & & 0^{100} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & \ominus \\ & 1 & \\ \ominus & & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$

$= PDP^{-1} = C$

Dus $C^{100} = C$