Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA

Dinsdag 20 juni 2006, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 2 punten waard.
- Het getal (score+4)/4, op de gebruikelijke wijze afgerond, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$ met $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarde(n) van β geldt $\underline{b} \in COL(A)$?

b. Bepaal een basis in $NUL(A)$.

c. Bepaal een **orthogonale** basis in $COL(A)$.

d. Ontbind vector $\underline{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in een component $\underline{v} \in COL(A)$ en een component $\underline{w}$ die loodrecht staat op alle vectoren in $COL(A)$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende vier beweringen:

a. Als in $\mathbb{R}^n$ het stelsel vectoren $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineair onafhankelijk is, dan is het stelsel vectoren $\{\underline{v}_1, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3\}$ ook lineair onafhankelijk.

b. De verzameling $W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \underline{x} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ is een lineaire deelruimte van vectorruimte $\mathbb{R}^3$.

c. Voor elke $m \times n-$ matrix C geldt: $\dim(NUL(C^T)) + \dim(ROW(C)) = m$.

d. Als B een inverteerbare matrix is met de eigenschap $B^T = B^{-1}$ dan geldt: $|B| = 1$.

3. Bereken door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode γ_1 en γ_2 zo dat de grafiek van $y = \gamma_1 \sqrt{x} + \gamma_2 \cos(\pi x)$ zo goed mogelijk aansluit bij de punten [1, 0], [4,2], [9, 4] en [16, 5] in het (x,y)-vlak.

4. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(x)) = x^2 p''(x) - xp'(x) + p(x)$ (uiteraard staan $p''(x)$ en $p'(x)$ resp. voor de tweede afgeleide en eerste afgeleide van $p(x)$ naar x). Bovendien wordt in $\mathbb{P}_2$ de basis $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x + x^2\}$ gegeven en is op $\mathbb{P}_2$ het inprodukt met voorschrift $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ gedefinieerd.

- **a.** Toon aan dat afbeelding T lineair is.
- **b.** Bepaal een basis in $NUL(T)$ (de nulruimte van T) en in $\mathcal{R}(T)$ (de beeldruimte/range van T).
- **c.** Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{B}$-matrix van lineaire afbeelding T)
- **d.** Construeer, uitgaande van $\{1, x, x^2\}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een **orthogonale** basis in $\mathbb{P}_2$.
- **e.** Bereken de beste approximatie (benadering) van $r(x) = x^2$ in $\mathbb{P}_1$.

5. Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & \alpha & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

- **a.** Voor welke waarde(n) van α heeft matrix A eigenwaarde 0?
- **b.** Neem $\alpha = 2$ en ga na of matrix A diagonaliseerbaar is.
- **c.** Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $B = PDP^{-1}$.
- **d.** Wat zijn de eigenwaarden (met hun algebraïsche multipliciteit) en de eigenruimten van matrix C, als $C = B + \beta I_3$ (hierbij is I_3 uiteraard de eenheidsmatrix met afmeting 3×3) waarbij $\beta \in \mathbb{R}$? Beargumenteer je antwoord.