Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Vrijdag 4 februari 2005, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 2 punten waard.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Het eindresultaat ontstaat na verrekening van de score van de tussentoets.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ en vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ met $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarden van α en β is het lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$ strijdig?

b. Bepaal voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de rang van A en de dimensie van $NUL(A)$.

c. Neem $\alpha = 0$ en bepaal de vectoren $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ waarvoor het lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar is.

2. Bewijs of weerleg de volgende vier beweringen:

a. De verzameling $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \text{ en } x_2 = -5x_3\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

b. Als de $n \times n$ – matrices A, B en C met $A \neq O_{n,n}$ *(de nulmatrix met afmeting $n \times n$)* voldoen aan $AB = AC$, dan moet gelden $B = C$.

c. Voor elk tweetal vectoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt: $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 4(\underline{u} \bullet \underline{v})$.

d. Als $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ eigenvectoren zijn van $n \times n$ – matrix B, dan is ook $\underline{x} + \underline{y}$ een eigenvector van B.

3. a. Bereken door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode γ_1 en γ_2 zo dat de grafiek van $y = \gamma_1 + \gamma_2 \sqrt{x}$ zo goed mogelijk aansluit bij de punten [0, 1], [1,6], [4, 3] en [9, 12].

b. Bereken de orthogonale projectie van $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ op $COL(A)$ *(de kolomruimte van A)*,

als $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Bereken de determinant van matrix $B = \begin{bmatrix} 2c_1 & -6 & 2c_2 & 2c_3 \\ b_1 & 4 & b_2 & b_3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -a_1 & 7 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$ als van matrix

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ bekend is dat $\det(A) = 5$.

5. Gegeven is de vectorruimte $V = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu}\}$ (*dus* $V = C([0, 1])$ met daarin de lineaire deelruimte $W = Span\{1, e^t, e^{-t}\}$. In W is de basis $\mathcal{B} = \{1, 1 + e^t, e^t + e^{-t}\}$ gegeven. Bovendien is de afbeelding $T : W \to W$ met voorschrift $T(f(t)) = f'(t) + f(t)$ gedefinieerd. (*uiteraard staat $f'(t)$ voor de afgeleide van $f(t)$ naar t*).
   a. Bewijs dat afbeelding T lineair is.
   b. Bepaal $NUL(T)$ (*de nulruimte van T*) en $R(T)$ (*de beeldruimte/range van T*).
   c. Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$.
   d. Op V wordt het inprodukt met voorschrift $\langle h, g\rangle = \int_0^1 h(t)g(t)dt$ gedefinieerd. Construeer in $Span\{1, t, t^2\}$, uitgaande van basis $\{1, t, t^2\}$ m.b.v. het Gram-Schmidt-proces, een orthogonale basis.

6. Gegeven is matrix $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.
   a. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $F = PDP^{-1}$.
   b. Bereken F^{121}.
   We beschouwen vervolgens het discrete dynamische systeem:
   $$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (een startvector uit } \mathbb{R}^3) \\ \underline{x}_{k+1} = F\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$
   c. Neem $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en bepaal oplossing $\underline{x}_k$.
   d. Geef aan voor welke startvectoren $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ het gegeven discrete dynamische systeem convergent is en bepaal voor die startvectoren $\lim_{k\to\infty}\underline{x}_k$.