Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Donderdag 10 juni 2004, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste gedeelte bestaat uit tien meerkeuzevragen. De daarbij behorende antwoorden A,B,C of D dient u op het bijgevoegde antwoordvel in de daarvoor bestemde hokjes in te vullen. Schrijf deze antwoorden **duidelijk** op. Het tweede gedeelte bestaat uit open vragen. Deze opgaven werkt u uit op gewoon tentamenpapier.
- De normering vindt u na de open vragen

---

1. Het lineaire stelsel vergelijkingen met aangevulde matrix $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & h & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & k \end{array}\right]$ heeft oneindig veel oplossingen als:

a. $h = \frac{1}{2}$ en $k \in \mathbb{R}$
b. $h = \frac{1}{2}$ en $k \neq 4$
c. $h = \frac{1}{2}$ en $k = 4$
d. $h \in \mathbb{R}$ en $k = 4$

2. Gegeven is het lineair **onafhankelijke** stelsel vectoren $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ in $\mathbb{R}^3$, de matrix $A = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \end{bmatrix}$ (dus $\underline{a}_1$ en $\underline{a}_2$ vormen de kolommen van matrix A) en vector $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$.
Vervolgens worden de 2 beweringen gedaan:

(I) als $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}\}$ lineair afhankelijk is, dan geldt $\underline{b} \in Span\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.
(II) het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{c}$ is oplosbaar voor elke $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$.

Er geldt:
a. beide uitspraken zijn waar
b. beide uitspraken zijn onwaar
c. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
d. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar

3. Er worden 2 uitspraken gedaan:

(I) als A een $n \times n-$ matrix is met $A^2 = 0$ (de nulmatrix), dan geldt ook $A = 0$.
(II) als B en C $n \times n-$ matrices zijn met $BC = 0$ dan geldt ook $B^3C^3 = 0$.

Nu geldt:
a. beide uitspraken zijn waar
b. beide uitspraken zijn onwaar
c. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
d. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar

4. Welke uitspraak is waar?

a. als W een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^n$ en $\underline{x} \in W$ en $\underline{y} \in W$, dan geldt ook $\underline{x} - \underline{y} \in W$.

b. als $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ dan is $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \underline{x} \bullet \underline{a} \geq 0\}$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

c. verzameling $S = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} | \beta \in \mathbb{R} \right\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

d. verzameling $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 x_3\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

5. Welke van de volgende uitspraken is/zijn waar voor elke 7×4 - matrix A?

(I) de dimensie van de nulruimte van A is hoogstens 4.

(II) de dimensie van de nulruimte van A is minstens 3.

a. (I) en (II) zijn beide waar

b. (I) en (II) zijn beide onwaar

c. alleen (I) is waar

d. alleen (II) is waar

6. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \gamma \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7+\gamma \\ 1-2\gamma \end{bmatrix}$ en $\underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. Het parallellepipedum dat wordt bepaald door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ heeft inhoud 2 als:

a. $\gamma = 0$ of $\gamma = -4$

b. $\gamma = 0$ of $\gamma = -4$ of $\gamma = -2$

c. $\gamma = -4$ of $\gamma = -2$

d. $\gamma = -2$

7. In $\mathbb{P}_1$ zijn gegeven de bases $\mathcal{A} = \{t-1, t+1\}$ en $\mathcal{B} = \{t, t-3\}$. Dan geldt $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} =$

a. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

8. Gegeven is dat vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van matrix $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 2 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 3 & \alpha & -2\beta \end{bmatrix}$ en dat de bijbehorende eigenwaarde negatief is. Hieruit kan men concluderen:

a. $\beta = 1$ en $\alpha > -1$

b. $\beta = 1$ en $\alpha < -1$

c. $\alpha = 1$ en $\beta > -1$

d. $\alpha = 1$ en $\beta < -1$

9. Matrix $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & \beta^2+10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is diagonaliseerbaar:

a. precies dan als $\beta = -2$
b. precies dan als $\beta = 2$
c. precies dan als $\beta = -2$ of $\beta = 2$
d. voor geen enkele $\beta \in \mathbb{R}$

10. Gegeven is de 3×3 – matrix A met de eigenwaarden -6, $\frac{1}{2}$ en 1 en de eigenruimten

$$E_{-6} = Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\},\ E_{\frac{1}{2}} = Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\} \text{ en } E_1 = Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

We beschouwen bovendien het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (een startvector uit } \mathbb{R}^3) \\ \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

en de volgende twee uitspraken worden gedaan:

(I) als $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ dan is het gegeven discrete dynamische systeem convergent

(II) als het gegeven discrete dynamische systeem convergent is, dan geldt $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$

Nu geldt:

a. beide uitspraken zijn waar
b. beide uitspraken zijn onwaar
c. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
d. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar

GA VERDER MET HET OPEN GEDEELTE

1. Gegeven is dat matrix A een 10×12 - matrix is en het homogene lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{0}$ drie vrije variabelen heeft. Is het mogelijk om $\underline{b} \in \mathbb{R}^{10}$ zodanig te kiezen dat $A\underline{x} = \underline{b}$ een strijdig lineair stelsel vergelijkingen is? Beargumenteer uw antwoord.

2. Zij $W = Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots, \underline{v}_p\}$ een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^n$ en zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ een vector die loodrecht staat op $\underline{v}_j$ voor elke $j \in \{1, 2, \ldots\ldots, p\}$.
   a. Toon aan dat $\underline{x}$ loodrecht staat op elke vector $\underline{w} \in W$.
   b. Zij bovendien een willekeurige vector $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ gegeven. Geef een uitdrukking (formule) voor de component van $\underline{y}$ die loodrecht staat op W (dus loodrecht staat op elke vector $\underline{w} \in W$) als $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots, \underline{v}_p\}$ een **orthogonale** basis is in W.

3. Bereken door toepassing van de kleinste-kwadraten-methode β_0 en β_1 zo dat de grafiek van $y = \beta_0 + \beta_1 \sin(x)$ zo goed mogelijk aansluit bij de punten $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(0,0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(\pi, 1)$.

4. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = tp(t) + p(0)$.
   (N.B. de vectorruimte $\mathbb{P}_n$ bestaat uit alle polynomen waarvan de graad ten hoogste n is)
   a. Toon aan dat afbeelding T lineair is.
   b. Bepaal de representatiematrix van T als op $\mathbb{P}_1$ de basis $\mathcal{A} = \{t+1, t-1\}$ en op $\mathbb{P}_2$ de basis $\mathcal{B} = \{t^2+1, t-1, t+1\}$ wordt gekozen.
   Voor de volgende 2 onderdelen beschouwen we $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}_2$ als lineaire deelruimten van $\mathbb{P}_\infty$ en wordt op $\mathbb{P}_\infty$ het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ gedefinieerd.
   c. Bepaal m.b.v. het Gram-Schmidt-proces, uitgaande van de basis $\{1, t, t^2\}$, een orthogonale basis in $\mathbb{P}_2$.
   d. Bepaal de orthogonale projectie van $q(t) = t^3$ op $\mathbb{P}_1$.

5. Gegeven is de matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $C = PDP^{-1}$.

Normering:

- Iedere goed beantwoorde meerkeuzevraag levert 1 punt op.
- De normering van de open vragen is:

opg. 1	2	**opg. 2**	a) 2	**opg. 3**	2	**opg. 4**	a) 2	**opg. 5** 2
			b) 1				b) 2	
							c) $2\frac{1}{2}$	
							d) $1\frac{1}{2}$	

- Het getal (score+3)/3, op de gebruikelijke wijze afgerond, geeft het tentamencijfer.