Uitwerking

Het MC-gedeelte:

1. C
2. C
3. D
4. A
5. C
6. B
7. A
8. B
9. D
10. B

Het open gedeelte:

Opg. 1 | JA.

uitleg: Het homogene lineaire stelsel vgl^n $A\underline{x} = \underline{0}$ heeft 3 vrije var^n, hieruit volgt dat $\dim(NUL(A)) = 3$. M.b.v. het Rangtheorema kan men vervolgens concluderen dat $Rang(A) = 9$. Dus ook $\dim(COL(A)) = 9$ hetgeen betekent dat $COL(A)$ een negen-dimensionale lin. deelr. is in $\mathbb{R}^{10}$. Dus $COL(A) \neq \mathbb{R}^{10}$. Als nu $\underline{b}$ gekozen wordt in $\mathbb{R}^{10}$ maar buiten $COL(A)$ dan is $A\underline{x} = \underline{b}$ strijdig $\boxtimes$

Opg. 2 | a) Bewijs: Zij $\underline{w} \in W$, dan kan men schrijven $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \cdots + c_p\underline{v}_p$ voor zekere $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$

Er volgt dan:

$$\underline{x} \cdot \underline{w} = \underline{x} \cdot (c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_p \underline{v}_p)$$
$$= c_1 (\underline{x} \cdot \underline{v}_1) + c_2 (\underline{x} \cdot \underline{v}_2) + \dots + c_p (\underline{x} \cdot \underline{v}_p)$$
$$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Dit betekent dat $\underline{x} \perp \underline{w}$ $\boxtimes$

b) Omdat $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p\}$ een <u>orthog.</u> basis is in W is

$$\left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1}\right)\underline{v}_1 + \left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2}\right)\underline{v}_2 + \dots + \left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_p}{\underline{v}_p \cdot \underline{v}_p}\right)\underline{v}_p$$

de orthog. projectie van $\underline{y}$ op W.

De component van $\underline{y}$ die loodrecht staat op W (dus de component van $\underline{y}$ in $W^{\perp}$) is

$$\underline{y} - \left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1}\right)\underline{v}_1 - \left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2}\right)\underline{v}_2 - \dots - \left(\frac{\underline{y} \cdot \underline{v}_p}{\underline{v}_p \cdot \underline{v}_p}\right)\underline{v}_p$$

opg. 3 Invullen 4 punten geeft:

$$\begin{cases} 0 = \beta_0 - \beta_1 \\ 0 = \beta_0 \\ 1 = \beta_0 + \beta_1 \\ 1 = \beta_0 \end{cases} \iff A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \underline{b} \quad \text{waarbij } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit lin. stelsel vgl$^{\text{n}}$ is strijdig, dus we lossen op $A^T A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = A^T \underline{b}$ (het bijbeh. stelsel normaalvgl$^{\text{n}}$)

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \beta_0 = 1/2 \text{ en } \beta_1 = 1/2$$

De gezochte k.k.-oplossing is dus $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(x)$

<u>Opg. 4</u> a) <u>Bewijs:</u> Zij $p, q \in \mathbb{P}_1$, dan geldt:

$$\begin{aligned} T((p+q)(t)) &= t\,(p+q)(t) + (p+q)(0) \\ &= t\,(p(t) + q(t)) + p(0) + q(0) \\ &= t\,p(t) + p(0) + t\,q(t) + q(0) = T(p(t)) + T(q(t)) \end{aligned}$$

Zij $p \in \mathbb{P}_1$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt:

$$\begin{aligned} T((\alpha p)(t)) &= t(\alpha p)(t) + (\alpha p)(0) \\ &= t\,\alpha\, p(t) + \alpha\, p(0) = \alpha\,(t\,p(t) + p(0)) \\ &= \alpha\, T(p(t)) \end{aligned}$$

$\boxtimes$

b) $T(t+1) = t(t+1) + 1 = t^2 + t + 1 = 1(t^2+1) + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2}(t+1)$

$T(t-1) = t(t-1) - 1 = t^2 - t - 1 = 1(t^2+1) + \frac{1}{2}(t-1) - 1\frac{1}{2}(t+1)$

De gevraagde repr. matrix is dus $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1\,1/2 \end{bmatrix}$

c) Neem $q_1(t) = 1$

$$q_2(t) = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}\, 1 = t - \frac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt} \cdot 1 = t - \frac{1}{2}$$

$$\underline{\varphi}_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\, 1 - \frac{\langle t^2, t-\tfrac{1}{2}\rangle}{\langle t-\tfrac{1}{2}, t-\tfrac{1}{2}\rangle}(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1 1\,dt}\cdot 1 - \frac{\int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2\,dt}{\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,dt}(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}(t-\tfrac{1}{2}) = t^2 - t + 1/6$$

Nu is $\{\underline{\varphi}_1(t), \underline{\varphi}_2(t), \underline{\varphi}_3(t)\}$ een orthog. basis in $\mathbb{P}_2$

d) De orthog. projectie van $\underline{\varphi}(t) = t^3$ op $\mathbb{P}_1$ is

$$\frac{\langle \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}_1(t)\rangle}{\langle \underline{\varphi}_1(t), \underline{\varphi}_1(t)\rangle}\underline{\varphi}_1(t) + \frac{\langle \underline{\varphi}(t), \underline{\varphi}_2(t)\rangle}{\langle \underline{\varphi}_2(t), \underline{\varphi}_2(t)\rangle}\underline{\varphi}_2(t)$$

$$= \frac{\int_0^1 t^3\,dt}{\int_0^1 1\,dt}\cdot 1 + \frac{\int_0^1 t^4 - \frac{1}{2}t^3\,dt}{\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,dt}(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3/40}{1/12}(t-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{9}{10}(t-1/2)$$

$$= \frac{9}{10}t - \frac{1}{5}$$

Opg. 5 $P_C(\lambda) = |C - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

De eigenwaarden van C zijn dus 2 en 3

De eigenruimten:

bij $\lambda = 2$, beschouw $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$

Hieruit volgt $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

bij $\lambda = 3$, beschouw $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Hieruit volgt $E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

Men kan dus nemen $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.