Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen (ITS)
Mekelweg 4; Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Vrijdag 24 januari 2003, 9.00-12.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste gedeelte bestaat uit twaalf meerkeuzevragen. De daarbij behorende antwoorden A,B,C of D dient u op het bijgevoegde antwoordvel in de daarvoor bestemde hokjes in te vullen. Schrijf deze antwoorden **duidelijk** op. Het tweede gedeelte bestaat uit open vragen. Deze opgaven werkt u uit op gewoon tentamenpapier.
- De normering vindt u na de open vragen

---

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen: $\begin{cases} x_1 + x_3 & = 3 \\ x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3 & = \alpha + 8 \\ \alpha x_1 - x_2 - x_3 & = -4 + 3\alpha \\ -x_1 + x_2 + \alpha x_3 & = 1 \end{cases}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dit stelsel vergelijkingen heeft een unieke oplossing , **waarvan het derde kental 0 is**, als:

a. $\alpha = 0$
b. $\alpha = -1$
c. $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq -1$
d. $\alpha = \frac{5}{4}$

2. Gegeven zijn de $m \times n$ – matrix A en de vector $\underline{b} \neq \underline{0}$ in $\mathbb{R}^m$. Voor de vectoren $\underline{z}$ en $\underline{y}$ uit $\mathbb{R}^n$ geldt $A\underline{z} = \underline{0}$ en $A\underline{y} = \underline{b}$. Er worden vervolgens 2 uitspraken gedaan, nl.

(I) de vector $3\underline{z} + \underline{y}$ is een oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$

(II) de vector $\underline{z} - 2\underline{y}$ is een oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$

Nu geldt:

a. beide uitspraken zijn waar
b. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
c. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar
d. beide uitspraken zijn onwaar

3. In de matrix $(AB)^T$ staat op de positie i,j (dus in rij i en kolom j) het inprodukt van

a. rij i van A en kolom j van B
b. rij j van A en kolom i van B
c. kolom i van A en rij j van B
d. kolom j van A en rij i van B

4. In $\mathbb{R}^3$ zijn de vectoren $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ en de deelverzamelingen $S = Span\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ en $T = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$ gegeven.
Er geldt:
- **a.** S is een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^3$ en $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ is een basis in S
- **b.** T is een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^3$
- **c.** als $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ zodat $\underline{x} \perp \underline{a}_1$ en $\underline{x} \perp \underline{a}_2$ dan volgt dat $\underline{x} \perp \underline{s}$ voor **elke** $\underline{s} \in S$
- **d.** er bestaan 2 vectoren $\underline{b}_1$ en $\underline{b}_2$ in $\mathbb{R}^3$ zodat $T = Span\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$

5. Gegeven zijn de bases $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ in $\mathbb{R}^2$, waarbij $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Dan geldt $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} =$
- **a.** $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$
- **b.** $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
- **c.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$
- **d.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

6. Er worden twee uitspraken gedaan, nl.
(I) een vierkante matrix met orthonormale kolommen is inverteerbaar
(II) als A een 5×3 – matrix is met onafhankelijke kolommen, dan is $NUL(A)$ tweedimensionaal
Er geldt:
- **a.** beide uitspraken zijn waar
- **b.** de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
- **c.** de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar
- **d.** beide uitspraken zijn onwaar

7. Gegeven wordt de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ door voor te schrijven $T((1,1,0,0)) = (1,1,3,1,3)$, $T((0,1,1,0)) = (1,-1,-1,-1,1)$, $T((0,0,1,1)) = (3,-3,-3,-3,3)$ en $T((0,0,-1,1)) = (1,1,3,1,3)$. Dan is de standaardmatrix (representatiematrix) van T gelijk aan:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. De orthogonale projectie van $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ op $Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ is

a. $\frac{4}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Gegeven worden de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 17 \\ 2 & -5 & -29 \\ 0 & 7 & 35 \end{pmatrix}$, de vector $\underline{b} = \begin{pmatrix} 105 \\ 7 \\ -18 \\ 97 \end{pmatrix}$ en de volgende twee beweringen:

(I) het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft een unieke kleinste-kwadraten-oplossing

(II) $A^T A$ is inverteerbaar

Er geldt:

a. beide uitspraken zijn waar
b. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
c. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar
d. beide uitspraken zijn onwaar

10. Over de $n \times n -$ matrices A en B worden de volgende 2 uitspraken gedaan:

(I) als $|A| = 0$ dan geldt $|A + B| = |B|$

(II) $|AB| = |BA|$

Er geldt:

a. beide uitspraken zijn waar
b. de eerste uitspraak is waar en de tweede uitspraak is onwaar
c. de eerste uitspraak is onwaar en de tweede uitspraak is waar
d. beide uitspraken zijn onwaar

11. Voor welke waarden van x zijn alle eigenwaarden van de matrix $\begin{pmatrix} x & 3 & 23 \\ 3 & x & 8 \\ 0 & 0 & 9-x \end{pmatrix}$ positief?

a. $3 < x < 9$
b. $-3 < x < 9$
c. $x < 9$
d. voor geen enkele waarde van x

12. Welk voorschrift is bruikbaar als inprodukt op $\mathbb{P}_2$?

a. $\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} x p(x) q(x)\, dx$
b. $\langle p,q \rangle = p(0) q(0) + p(1) q(1)$
c. $\langle p,q \rangle = p(-1) q(-1) + 2p(0) q(0) + p(1) q(1)$
d. $\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) + q(x)\, dx$

GA DOOR MET HET OPEN GEDEELTE

1. **a.** Gegeven is een onafhankelijk stelsel vectoren $\{\underline{b}_1, \ldots\ldots\ldots, \underline{b}_k\}$ in $\mathbb{R}^n$. Toon aan dat als $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ een lineaire combinatie is van de vectoren uit stelsel $\{\underline{b}_1, \ldots\ldots\ldots, \underline{b}_k\}$, zeg $\underline{x} = c_1\underline{b}_1 + \ldots\ldots\ldots + c_k\underline{b}_k$, dat dan de gewichten $c_1, \ldots\ldots, c_k$ **uniek** zijn bepaald.
   b. In $\mathbb{R}^5$ is gegeven de lineaire deelruimte $W = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \underline{x} \perp \underline{a} \text{ en } \underline{x} \perp \underline{b}\right\}$ waarbij $\underline{a} = (1,0,-1,2,0)$ en $\underline{b} = (-1,1,0,0,-2)$. Bepaal een basis in W.
   c. Bewijs of weerleg: als A een inverteerbare matrix is met eigenwaarde λ, dan is $\frac{1}{\lambda}$ eigenwaarde van A^{-1}.
   d. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ (de vectorruimte van alle polynomen van ten hoogste graad 2) met daarop het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$. Construeer m.b.v. het Gram-Schmidt-proces uitgaande van $\{1, x, x^2\}$ een orthogonale basis in $\mathbb{P}_2$.

2. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met voorschrift $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ waarbij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Bovendien wordt de vector $\underline{u} = \begin{pmatrix} p \\ 4 \\ q \end{pmatrix}$ met $p, q \in \mathbb{R}$ gegeven.
   a. Voor welke waarde(n) van p en q geldt $\underline{u} \in NUL(T)$?
   b. Bepaal een basis in $COL(A)$.
   c. Het stelsel $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ is een **onafhankelijk** stelsel vectoren in $\mathbb{R}^3$. Bewijs dat het stelsel $\{T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2), T(\underline{v}_3)\}$ afhankelijk is.

3. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = tp'(t)$
   (**N.B.** $p'(t)$ staat voor de afgeleide van p naar t)
   a. Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.
   b. Bepaal de nulruimte (kern) en de beeldruimte (range) van T. (Hint: polynomen uit $\mathbb{P}_2$ kunnen geschreven worden in de vorm $p(t) = a + bt + ct^2$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$)
   c. We definiëren bovendien basis $\mathcal{B} = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ in $\mathbb{P}_2$. Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$.

4. Gegeven is de matrix $F_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -\alpha & -1 \\ 4 & 2\alpha & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Bepaal de eigenwaarden van F_α.
   b. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $F_2 = PDP^{-1}$.
   (voor dit onderdeel mag je dus $\alpha = 2$ nemen)

Normering:
- iedere goed beantwoorde meerkeuzevraag levert 1 punt op.
- elk **onderdeel** van de open vragen levert maximaal $1\frac{1}{2}$ punt op.
- het getal (3*score + 10)/10 geeft het eindresultaat (dit cijfer wordt **niet** afgerond).