naam: correctiemodel

studienummer: 0000000

de antwoorden van de meerkeuze-opgaven (vul de tekens A,B,C of D in) zijn:

opgave 1:	D	opgave 5:	A	opgave 9:	D
opgave 2:	B	opgave 6:	B	opgave 10:	C
opgave 3:	B	opgave 7:	D	opgave 11:	A
opgave 4:	C	opgave 8:	A	opgave 12:	C

Opg. 1

a) **Bewijs:**

stel $\underline{x} = c_1\underline{b}_1 + c_2\underline{b}_2 + \cdots + c_k\underline{b}_k$ voor zekere $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

en dat $\underline{x} = d_1\underline{b}_1 + d_2\underline{b}_2 + \cdots + d_k\underline{b}_k$ voor zekere $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}$

Dan geldt $c_1\underline{b}_1 + \cdots + c_k\underline{b}_k = d_1\underline{b}_1 + \cdots + d_k\underline{b}_k$

en dus $(c_1 - d_1)\underline{b}_1 + (c_2 - d_2)\underline{b}_2 + \cdots + (c_k - d_k)\underline{b}_k = \underline{0}$

Omdat $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ onafh. is, volgt nu dat $c_i - d_i = 0$ voor $i \in \{1, \ldots, k\}$ en ~~da~~ derhalve geldt ook $c_i = d_i$ voor $i \in \{1, \ldots, k\}$. $\boxtimes$

b) Stel dat $\underline{x} \in W$, dan geldt $\underline{x} \perp \underline{a}$ en $\underline{x} \perp \underline{b}$.

Dus volgt:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_5, x_4 \text{ en } x_3 \text{ zijn vrij} \\ x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

Dus $\underline{x} \in W$

$$\Longleftrightarrow \underline{x} = x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ voor zekere $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

Dit betekent dat $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

en dat $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$ onafh. is, is

dit een basis in W.

c) Juist, immers
als λ eigenw. is van A, dan bestaat
er een $\underline{x} \neq \underline{0}$ zodat $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.
Omdat A^{-1} bestaat, betekent dit dat $A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\lambda$
dus $\underline{x} = \lambda A^{-1}\underline{x}$ en $A^{-1}\underline{x} = \frac{1}{\lambda}\underline{x}$ (immers
$\lambda \neq 0$ als A inverteerb. is). Maar dit betekent
dat $\frac{1}{\lambda}$ eigenw. is van A^{-1} bij dezelfde eigen-
vector $\underline{x}$. ⊠

d) Neem $p_1(t) = 1$

$$p_2(t) = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = t - \frac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt}$$

$$= t - \frac{1}{2}$$

$$p_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 - \frac{\langle t^2, t-\frac{1}{2}\rangle}{\langle t-1/2, t-1/2\rangle}(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{\int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2\,dt}{\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,dt}(t-\tfrac{1}{2})$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}(t - 1/2)$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}(t - 1/2) = t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= t^2 - t + 1/6$$

Dus $\boxed{\left\{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}}$ is een

orthogonale basis in $\mathbb{P}_2$.

$\boxed{\text{pg. 2}}$ a) $\underline{u} \in NUL(F) \iff F(\underline{u}) = \underline{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 4 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} p + 8 + 3q = 0 \\ 4p + 20 + 6q = 0 \\ 7p + 32 + 9q = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Beschouw: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -8 \\ 4 & 6 & -20 \\ 7 & 9 & -32 \end{array}\right) \downarrow -4 \downarrow -7 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -12 & 24 \end{array}\right)$

Hieruit volgt: $\boxed{q = -2 = p}$

b) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \downarrow -4 \downarrow -7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \downarrow -2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De eerste twee kolommen van F zijn dus pivotkolommen en bijgevolg is $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}}$ een basis in $COL(F)$

c) $\left.\begin{array}{l} F(\underline{v}_1), F(\underline{v}_2) \text{ en } F(\underline{v}_3) \text{ behoren tot } COL(F) \\ \dim(COL(F)) = 2 \quad (\text{zie ii>}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F(\underline{v}_1), F(\underline{v}_2), F(\underline{v}_3)\}$ is afhankelijk $\boxtimes$

Opg. 3

a) 1) Zij $p, q \in \mathbb{P}_2$, dan geldt $T((p+q)(t))$
$$= t\,(p+q)'(t) = t\,(p'(t)+q'(t))$$
$$= t\,p'(t) + t\,q'(t) = T(p(t)) + T(q(t))$$

2) Zij $p \in \mathbb{P}_2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt $T((\alpha p)(t))$
$$= t\,(\alpha p)'(t) = t\,\alpha p'(t) = \alpha\, t p'(t) = \alpha T(p(t))$$
$\boxtimes$

b) <u>De nulruimte:</u>

Schrijf $p(t) = a + bt + ct^2$ en eis:

$T(p(t))$ = nulpolynoom

$\Rightarrow t\,(b + 2ct)$ = nulpolynoom

$\Rightarrow bt + 2ct^2$ = nulpolynoom

$\Rightarrow b = c = 0$ en $a \in \mathbb{R}$, dus $p(t) = a$ met $a \in \mathbb{R}$

Dus volgt $\boxed{NUL(T) = \mathbb{P}_0 = \text{Span}\{1\}}$

<u>De beeldruimte:</u>

$T(1) = 0$, $T(t) = t$ en $T(t^2) = 2t^2$ dus

$R(T) = \text{Span}\{0, t, 2t^2\} = \text{Span}\{t, t^2\}$

<u>OF</u> $T(p(t)) = t\,p'(t) = t\,(b + 2ct) = bt + 2ct^2$

Dus $\boxed{\begin{aligned} R(t) &= \{q(t) = bt + 2ct^2 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Span}\{t, t^2\} \end{aligned}}$

<u>N.B.</u> Het is interessant om $T(p(t)) = p(t)$ (de eigenpolynomen bij eigenw. 1) op te lossen.

c) $T(1) = 0$

$T(1+t) = t = -1 + (1+t)$

$T(1+t+t^2) = t(1+2t) = t+2t^2 =$

$-1 - (1+t) + 2(1+t+t^2)$

<u>Hieruit volgt:</u>

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = \left([T(1)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(1+t)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(1+t+t^2)]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Opg.4}}$ a) $p_{F_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 1 \\ -2 & -\alpha-\lambda & -1 \\ 4 & 2\alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{+1}{\downarrow} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 0 \\ 4 & 2\alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[-1]{}$

$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha+\lambda-2 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 2\alpha-4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha+\lambda-2 & 1 \\ 2\alpha-4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda \left((\alpha+\lambda-2)(2-\lambda) + 4 - 2\alpha \right)$

$= \lambda \left(-\lambda^2 + (4-\alpha)\lambda \right) = -\lambda^2 \left(\lambda + \alpha - 4 \right)$

De eigenw$^{\underline{n}}$ zijn dus: $\boxed{\begin{matrix} 0 & \text{(dubbel)} \\ 4-\alpha & \text{(enkelv.)} \end{matrix}}$

b) De eigenw$^{\underline{n}}$ van F_2 zijn 0 (dubbel) en 2 (enkelv.)

Bovendien: $E_0 = \text{Span}\{(1,0,-2), (1,-1,0)\}$

en $E_2 = \text{Span}\{(1,-1,2)\}$.

Dus $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ en $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & & \cancel{0} \\ & 0 & \\ \cancel{0} & & 2 \end{pmatrix}}$