Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen (ITS)
Mekelweg 4; Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi1273GE en wi2273TA
Vrijdag 1 november 2002, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste gedeelte bestaat uit acht vragen, waarop met een betrekkelijk eenvoudige rekenpartij of redenering een antwoord kan worden gevonden. Dit antwoord wordt goed of fout gerekend. Een goed antwoord wordt met $1\frac{1}{2}$ punt gewaardeerd. In het tweede gedeelte worden bewijzen, redeneringen en uitgebreidere rekenpartijen gevraagd. Elk onderdeel van deze vragen is maximaal 3 punten waard. Bij deze vragen kan een onvolledige beantwoording of een beantwoording waarin (reken)fouten optreden nog een deel van het maximaal te behalen aantal punten opleveren.
- Het eindcijfer wordt berekend volgens de formule (3*score+10)/10. Voor geodesiestudenten wordt dit resultaat op de gebruikelijke wijze afgerond en als cijfer voor lineaire algebra (deel 1) in de administratie ingevoerd. Voor TA-studenten wordt dit resultaat in 1 decimaal berekend en volgens de gemaakte afspraken gebruikt om het cijfer van het reguliere tentamen (dat cijfer wordt in januari 2003 gescoord) eventueel te verhogen.

HET EERSTE GEDEELTE

(Geef duidelijk aan wat je antwoord is. Alleen de antwoorden worden beoordeeld, niet het bijbehorende rekenwerk.)

1. Geef aan voor welke waarden van h en k het lineaire stelsel vergelijkingen met de aangevulde matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & h & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & k \end{array}\right)$$

strijdig is.

2. We beschouwen het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$, waarvan $\underline{c}$ een oplossing is. De oplossingsverzameling van $A\underline{x} = \underline{0}$ is $Span\{\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3\}$. Geef de algemene oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$.

3. Gegeven is de lineaire deelruimte $W = \left\{ \begin{pmatrix} a-2b+5c \\ 2a+5b-8c \\ -a-4b+7c \\ 3a+b+c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ in $\mathbb{R}^4$. Bepaal een basis in W.

4. Gegeven zijn de vector $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$ met $p \in \mathbb{R}$ en de matrix $F = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Voor welke waarde(n) van p geldt $\underline{w} \in COL(F)$?

5. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de x_2 – as over π radialen. Geef de standaardmatrix (representatiematrix) van T.

6. Bepaal een basis in $NUL(F)$ als $F = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Gegeven is de 8×3 – matrix A met $\dim(NUL(A)) = 0$. Bepaal $\dim(NUL(A^T))$.

8. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u}_1 = (1,2,1,1)$, $\underline{u}_2 = (-2,1,-1,1)$, $\underline{u}_3 = (1,1,-2,-1)$, $\underline{u}_4 = (-1,1,1,-2)$ en $\underline{v} = (4,5,-3,3)$ in $\mathbb{R}^4$. Schrijf $\underline{v}$ als som van een vector in $Span\{\underline{u}_1\}$ en een vector in $Span\{\underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$.
(Hint: $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ is een orthogonale basis in $\mathbb{R}^4$)

HET TWEEDE GEDEELTE
(Bij deze vragen dient elk antwoord duidelijk beargumenteerd te worden.)

1. **a.** **Bewijs of weerleg**: als A een $n \times n$ – matrix is met de eigenschap dat $A^2 = O_{n,n}$ dan is $I_n + A$ inverteerbaar en geldt $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.

   b. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$. Ga na voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ matrix A inverteerbaar is.

   c. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. **Bewijs** dat $NUL(T) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | T(\underline{x}) = \underline{0}\}$ een lineaire deelruimte is in $\mathbb{R}^n$.

   d. Zij $H = Span\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_p\}$ met $\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_p \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ waarbij $\underline{x} \perp \underline{w}_i$ voor elke $i \in \{1, 2, ..., p\}$. **Bewijs** dat $\underline{x}$ loodrecht staat op elke vector uit H.

2. Geven zijn de matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   a. Construeer een orthonormale basis in $COL(C)$.

   b. Bepaal de orthogonale projectie van $\underline{d}$ op $COL(C)$ en bereken de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van het lineaire stelsel vergelijkingen $C\underline{x} = \underline{d}$

deze niet

t/m G-S proces = 6.4