Uitwerking

Het eerste gedeelte

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & h & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & k \end{array}\right)\xrightarrow{+2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & h & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2h-1 & k-4 \end{array}\right)$

Nu volgt: het Lin. stelsel is strijdig $\Longleftrightarrow$ $\boxed{h = \tfrac{1}{2} \text{ en } k \neq 4}$

2. De alg. opl. van $A\underline{x} = \underline{b}$ is $\boxed{\underline{x} = \underline{c} + \mu_1 \underline{d}_1 + \mu_2 \underline{d}_2 + \mu_3 \underline{d}_3 \text{ waarbij } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}}$

3. $\underline{x} \in W \Longleftrightarrow \underline{x} = a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\-8\\7\\1\end{pmatrix}$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt dat $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-8\\7\\1\end{pmatrix}\right\}$

$= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$ omdat $\begin{pmatrix}5\\-8\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix}$.

Daar $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$ onafhank. is, is $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}}$

een basis in W.

4. $\underline{w} \in \text{Col}(F) \Longleftrightarrow F\underline{x} = \underline{w}$ is oplosbaar

Beschouw derhalve: $\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & p \end{array}\right) \xrightarrow{+2,\ -1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 2+2p \\ 2 & 4 & 4 & 1-p \\ 4 & 0 & 4 & p \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 1-p \\ 0 & -2 & -1 & 2+2p \\ 4 & 0 & 4 & p \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 1-p \\ 0 & -2 & -1 & 2+2p \\ 0 & -8 & -4 & 3p-2 \end{array}\right) \xrightarrow{-4}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 1-p \\ 0 & -2 & -1 & 2+2p \\ 0 & 0 & 0 & -5p-10 \end{array}\right)$ Nu volgt: $\underline{w} \in \text{Col}(F) \Longleftrightarrow$

$\boxed{p = -2}$

(5) De standaardmatrix $= \begin{pmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) & T(\underline{e}_3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

(6) Los op $F\underline{x} = \underline{0}$

Beschouw daartoe $\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{zie opg. 4}]{\text{vegen}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) {\scriptstyle +2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hieruit volgt: $\underline{x} \in NUL(F) \Longleftrightarrow \underline{x} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ met $\mu \in \mathbb{R}$

Dus $NUL(F) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ en $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}}$ is een basis in $NUL(F)$

(7) A is een 8×3-matrix met $\dim(NUL(A)) = 0$.
De kolommen van A zijn dus onafhankelijk en bijgevolg zijn de 3 rijen van A^T onafhankelijk.
Dit betekent dat A^T 3 pivotposities heeft en rang$(A^T) = 3$
Uit het rangtheorema volgt nu:

$$\dim(NUL(A^T)) + \underbrace{\text{rang}(A^T)}_{3} = \underbrace{\text{aantal kol}^n \text{ van } A^T}_{8}$$

Dus $\boxed{\dim(NUL(A^T)) = 5}$

(8) Omdat $u = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_3\}$ een orthogonale basis in $\mathbb{R}^4$ is, geldt:

$$[\underline{v}]_u = \begin{pmatrix} \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \\ \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}_2}{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2} \\ \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}_3}{\underline{u}_3 \cdot \underline{u}_3} \\ \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}_4}{\underline{u}_4 \cdot \underline{u}_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/7 \\ 3/7 \\ 12/7 \\ -8/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/7 \\ 12/7 \\ -8/7 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt: $\underline{v} = 2\underline{u}_1 + \frac{1}{7}\left(3\underline{u}_2 + 12\underline{u}_3 - 8\underline{u}_4\right)$

De component van $\underline{v}$ in Span $\{\underline{u}_1\}$ is $\boxed{2\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

De component van $\underline{v}$ in Span $\{\underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ is

$$\boxed{\frac{1}{7}\left(3\underline{u}_2 + 12\underline{u}_3 - 8\underline{u}_4\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -35 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Het tweede gedeelte

Opg. 1 a) Juist, immers

$$(I_n + A)(I_n - A) = I_n^2 - A + A - A^2 = I_n - A^2 = I_n.$$

$A^2 = O_{n,n}$

$$\text{En } (I_n - A)(I_n + A) = I_n^2 + A - A - A^2 = I_n - A^2 = I_n$$

Hieruit volgt: $I_n + A$ is inverteerbaar en $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$

$\boxtimes$

b) We vegen A naar echelonvorm:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 3 \\ 0 & 0 & 16 - 5\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Nu volgt: A is inverteerbaar $\Longleftrightarrow$ Rang$(A) = 3$

$\Longleftrightarrow 16 - 5\alpha^2 \neq 0$

$\Longleftrightarrow \alpha \neq -\frac{4}{5}\sqrt{5}$ en $\alpha \neq \frac{4}{5}\sqrt{5}$

c) *) daar T lineair is, geldt $T(\underline{0}) = \underline{0}$. Dus $\underline{0} \in NUL(T)$

*) Zij $\underline{x}, \underline{y} \in NUL(T)$, dan geldt $T(\underline{x}+\underline{y})$

$= T(\underline{x}) + T(\underline{y}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

T is lineair

$\underline{x}, \underline{y} \in NUL(T)$

Dus $\underline{x} + \underline{y} \in NUL(T)$ en $NUL(T)$ is gesloten t.a.v. de optelling.

*) Zij $\underline{x} \in NUL(T)$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt $T(\alpha \underline{x})$

$= \alpha T(\underline{x}) = \alpha . \underline{0} = \underline{0}$

T is lineair

$\underline{x} \in NUL(T)$

Dus $\alpha \underline{x} \in NUL(T)$ en $NUL(T)$ is gesloten t.a.v. het scalaire produkt $\boxtimes$

d) Zij $\underline{h} \in H$, dan kan men schrijven

$\underline{h} = \mu_1 \underline{w}_1 + \mu_2 \underline{w}_2 + \cdots + \mu_p \underline{w}_p$ voor zekere $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}$.

Dan geldt $\underline{x} \cdot \underline{h} = \underline{x} \cdot (\mu_1 \underline{w}_1 + \mu_2 \underline{w}_2 + \cdots + \mu_p \underline{w}_p)$

$= \mu_1 (\underbrace{\underline{x} \cdot \underline{w}_1}_{=0}) + \mu_2 (\underbrace{\underline{x} \cdot \underline{w}_2}_{=0}) + \cdots + \mu_p (\underbrace{\underline{x} \cdot \underline{w}_p}_{=0})$

$= 0$. Dus $\underline{x} \perp \underline{h}$ $\boxtimes$

$\underline{x} \perp \underline{w}_i$ voor elke $i \in \{1, \ldots, p\}$