Faculteit EWI, afdeling DIAM
Tentamen Lineaire Algebra, WI1273TA (deel 1)
Woensdag 29 januari 2014, 18.30-20.30 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+2.5)/2.5 , afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	1,5	Opg. 4	4
Opg. 1b	1,5	Opg. 2b	2	Opg. 3b	2		
Opg. 1c	1,5	Opg. 2c	2	Opg. 3c	2		
Opg. 1d	2						

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\gamma^2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\gamma \\ 8-\gamma^2 \end{bmatrix}$

waarbij $\gamma \in \mathbb{R}$.

a. Ga na voor welke waarde(n) van γ geldt $\underline{b} \in COL(A)$.

b. Neem $\gamma = 2$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

c. Neem $\gamma = 2$ en bepaal $\dim(NUL(A^T))$.

d. Neem $\gamma = \sqrt{3}$ en bepaal een basis van de lineaire deelruimte $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | A\underline{x} = \underline{x}\}$ in $\mathbb{R}^3$.
(Ter info: H is de dekpuntsverzameling van de lineaire afbeelding $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met voorschrift $\mathcal{T}(\underline{x}) = A\underline{x}$)

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

a. **Bewering 1**: Als $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ een basis is van $\mathbb{R}^4$, dan is het stelsel vectoren $\{\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_2 + \underline{a}_3, \underline{a}_3 + \underline{a}_4, \underline{a}_4 + \underline{a}_1\}$ lineair onafhankelijk.

b. **Bewering 2**: Als $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren is in $\mathbb{R}^4$ en B de 4×4-matrix is met resp. de kolommen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $2\underline{b}_1 - 6\underline{b}_2 + 5\underline{b}_3$, dan geldt $\dim(NUL(B)) = 3$.

c. **Bewering 3**: Als $\underline{x}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^4$ en $\underline{x} \perp \underline{a}$, $\underline{x} \perp \underline{b}$ en $\underline{x} \perp \underline{c}$, dan geldt $\underline{x} \perp \underline{v}$ voor elke vector $\underline{v} \in Span\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$.

z.o.z.

3. Zij $\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die $\underline{e}_1$ afbeeldt op $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ op $\underline{e}_2 - 2\,\underline{e}_1$ (een zgn. horizontal shear) en $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de samenstelling van eerst de orthogonale projectie op $Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en vervolgens $\mathcal{S}$. U mag in deze opgave aannemen dat afbeelding $\mathcal{T}$ lineair is.

a. Bepaal een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ zodat $\mathcal{S}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

b. Geef de standaardmatrix van $\mathcal{T}$.

c. Geef een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.

4. Gegeven zijn de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Ontbind vector $\underline{d}$ in een component $\underline{v} \in ROW(B)$ en een component $\underline{w}$ die loodrecht staat op alle vectoren in $ROW(B)$.