Uitwerking

Opg. 1 a/ Er geldt: $\underline{b} \in COL(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar.

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1+\gamma \\ 2 & 4 & 9 & \delta-\gamma^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\gamma^2 & \gamma \\ 0 & 2 & 7-2\gamma^2 & 6-\gamma^2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\gamma^2 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\gamma^2 & \gamma \\ 0 & 0 & 4-\gamma^2 & 6-\gamma^2-\gamma \end{array}\right]$$

$4-\gamma^2 = (2-\gamma)(2+\gamma)$, $6-\gamma^2-\gamma = -(\gamma+3)(\gamma-2)$

Nu volgt:

$\underline{b} \in COL(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosb. $\iff \gamma \neq -2$

b/ Los op $A\underline{x} = \underline{0}$. Uit a/ volgt dat de aangevulde matrix van dit lineaire stelsel kan worden geveegd tot (subst. $\gamma = 2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5\frac{1}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -5\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ met } x_3 \in \mathbb{R}$$

Hieruit volgt: $NUL(A) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

en bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $NUL(A)$

c/ Als $\gamma = 2$ geldt $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dus

$\dim(COL(A)) = 2$ (het aantal pivotposities)

Vervolgens passen we het Rang-Theorema toe op A^T, dat geeft: $\dim(NUL(A^T)) = 3 - \dim(COL(A^T)) = 3 - \dim(ROW(A)) = 3 - \dim(COL(A)) = 3 - 2 = 1$

d/ $\underline{x} \in H \iff A\underline{x} = \underline{x}$, dus Los op $A\underline{x} = \underline{x}$.
Daartoe beschouwen we de aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \underset{-2}{\downarrow} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-2}{\downarrow} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $\underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_3 \in \mathbb{R}$, $H = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
en $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van H.

Opg. 2 a/ Onwaar, immers
$(\underline{a}_1+\underline{a}_2)-(\underline{a}_2+\underline{a}_3)+(\underline{a}_3+\underline{a}_4)-(\underline{a}_4+\underline{a}_1)=\underline{0}$

b/ $B = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \underline{b}_3 & 2\underline{b}_1 - 6\underline{b}_2 + 5\underline{b}_3 \end{bmatrix}$ en omdat $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ onafhankelijk is heeft B 3 pivotkolommen. Dus geldt: Rang $(B) = \dim(\text{Col}(B)) = 3$. Uit het rangtheorema volgt nu $\dim(\text{NUL}(B)) = 1$
De bewering is dus onwaar.

c/ Waar, immers zij $\underline{v} \in \text{Span}\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ dan kan men schrijven $\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$ voor zekere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Nu volgt: $\underline{x} \cdot \underline{v} = \underline{x} \cdot (\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}) =$
$\lambda_1 (\underline{x} \cdot \underline{a}) + \lambda_2 (\underline{x} \cdot \underline{b}) + \lambda_3 (\underline{x} \cdot \underline{c}) = 0 + 0 + 0 = 0$
Dus $\underline{x} \perp \underline{v}$ ⊠

Opg. 3 a/ Neem $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ en eis dat: $S(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow x_1 S(\underline{e}_1) + x_2 S(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2\tfrac{1}{2} \text{ en } x_1 = 7$$

De gezochte vector is dus $\underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(deze vector is overigens eenduidig)

b/

$$\underline{e}_1 \xrightarrow{proj} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2 \xrightarrow{S} \frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}(\underline{e}_2 - 2\underline{e}_1)$$

$$= -\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 \xrightarrow{proj} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2 \xrightarrow{S} -\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

De gezochte standaardmatrix is dus

$$\begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c/

Uit de standaardmatrix volgt

$$NUL(T) = R(T) = Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

(Dit is overigens ook meetkundig duidelijk)

Bijgevolg is bijv. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ een basis van zowel $NUL(T)$ als $R(T)$

Opg. 4: Als we de rijen van B resp. $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $\underline{b}_4$ noemen, geldt $\underline{b}_4 = \underline{b}_1 - \frac{1}{2}\underline{b}_2 + \frac{1}{2}\underline{b}_3$.

Verder is $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ onafhankelijk, dus een basis van ROW(B)

Uit deze basis construeren we een orthogonale basis $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ m.b.v. het Gram-Schmidt-proces. Neem daartoe:

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \underline{b}_2 - \left(\frac{\underline{b}_2 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{c}_2 = -\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_3 = \underline{b}_3 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{c}_3 = -\frac{1}{2}\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

__Nu volgt:__

$$\underline{v} = \text{Proj}_{ROW(B)}(\underline{d}) = \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_3}{\underline{c}_3 \cdot \underline{c}_3}\right)\underline{c}_3$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{14}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

en component $\underline{w} = \underline{d} - \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$