TU Delft

Faculteit EWI, afdeling DIAM
Tentamen Lineaire Algebra (deel 1), wi1273TA
Vrijdag 12 April 2013, 9.00-11.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 2 & -2 & -14 & 0 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Geef voor elke waarde van α een basis van $COL(A)$.

b. Neem $\alpha = -3$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

Voor de volgende 2 onderdelen nemen we $\alpha = 8$.

c. Bepaal een **orthogonale** basis van $COL(A)$.

d. Ontbind $\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in een component $\underline{v} \in COL(A)$ en een component $\underline{w} \in COL(A)^{\perp}$, het orthogonale complement van $COL(A)$ in $\mathbb{R}^4$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

a. **Bewering 1**: Als $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ en $\underline{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ h \end{bmatrix}$, dan is het stelsel $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ voor elke $h \in \mathbb{R}$ lineair afhankelijk.

b. **Bewering 2**: Als A een $m \times n-$ matrix is en $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, dan is de afbeelding $\mathcal{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ met voorschrift $\mathcal{T}(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ lineair.

c. **Bewering 3**: Als $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ en $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$, dan geldt $rang(\underline{u}\,\underline{v}^T) \leqslant 1$.

z.o.z.

3. Gegeven zijn de lineaire afbeeldingen $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{S}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Hierbij is $\mathcal{T}$ de afbeelding die vectoren uit $\mathbb{R}^3$ eerst roteert om de $x_1 - as$ over π radialen en vervolgens (de geroteerde vectoren) spiegelt in $W = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Afbeelding $\mathcal{S}$ is de matrixtransformatie behorend bij matrix $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal een basis van $R(\mathcal{S})$, de beeldruimte (range) van $\mathcal{S}$.

b. Geef de standaardmatrix van $\mathcal{T}$.

4. Bepaal x zodanig dat $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Gegeven is dat $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$, $\underline{a} \perp \underline{b}$ en $H = Span\{\underline{a}, \underline{b}\}$. Geef een basis van $H^{\perp}$, het orthogonale complement van H in $\mathbb{R}^3$.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	$1\frac{1}{2}$	Opg. 4	2	Opg. 5	2
Opg. 1b	2	Opg. 2b	2	Opg. 3b	$2\frac{1}{2}$				
Opg. 1c	3	Opg. 2c	2						
Opg. 1d	$1\frac{1}{2}$								

$8\frac{1}{2}$ 6 4 2 2