Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra (deel 1), wi1273TA

Donderdag 2 februari 2012, 9.00-11.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+2.5)/2.5, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	1.5	Opg. 3a	2	Opg. 4a	2.5
Opg. 1b	2	Opg. 2b	1.5	Opg. 3b	2	Opg. 4b	2
Opg. 1c	2	Opg. 2c	1.5	Opg. 3c	2	Opg. 4c	1.5

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal α zodanig dat $\underline{b} \in COL(A)$.

b. Bepaal oplossing $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ van het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ als gegeven is dat $x_3 = -2$.

c. Bepaal voor welke waarde(n) van β geldt $rang(B) = \dim(NUL(B))$ als

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \beta \\ 1 & -1 & \beta+7 & 2\beta-2 \\ 3 & 0 & \beta+8 & 3\beta \end{bmatrix}$$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Bewijs of weerleg de volgende drie beweringen:

a. Bewering 1: Voor elk willekeurig tweetal $n \times n$ – matrices A en B geldt $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b. Bewering 2: De enige 2×2-matrices die gelijk zijn aan hun eigen inverse zijn de 4 matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c. Bewering 3: Als $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $W = Span\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ en $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ waarbij $\underline{x} \perp \underline{a}$, $\underline{x} \perp \underline{b}$ en $\underline{x} \perp \underline{c}$ dan geldt $\underline{x} \perp \underline{w}$ voor elke $\underline{w} \in W$.

z.o.z.

3. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die vectoren uit $\mathbb{R}^2$ eerst spiegelt in de x_2 –as en vervolgens (de gespiegelde vectoren) roteert om (0,0) over $\frac{\pi}{6}$ radialen met de klok mee (clockwise). Laat A de bijbehorende standaardmatrix zijn.

a. Bepaal standaardmatrix A.

b. Bepaal de vector(en) $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt $\mathcal{T}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c. Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{S})$ en van $R(\mathcal{S})$ als $\mathcal{S}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding is met voorschrift $\mathcal{S}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 10x_3 \\ -2x_1 - 5x_2 - 41x_3 \\ 3x_1 + 9x_3 \end{bmatrix}$.

4. Beschouw de matrix $C = [\underline{c}_1\ \underline{c}_2\ \underline{c}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ en vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal een orthogonale basis van $COL(C)$.

b. Ontbind vector $\underline{d}$ in een component $\underline{u} \in COL(C)$ en een component $\underline{v} \in NUL(C^T)$, zodat $\underline{u} + \underline{v} = \underline{d}$.

c. Geef een basis van $COL(C)^\perp$, het orthogonale complement van $COL(C)$ in $\mathbb{R}^4$.