Uitwerking

Opg 1. a/ $\underline{b} \in COL(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & \alpha \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 3 & 2+\alpha & 1+\alpha \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 2-2\alpha & \alpha-2 \end{array}\right]$$

Nu volgt:

$\underline{b} \in COL(A) \iff \alpha \neq 1$

b/ $x_3 = -2$ dus $(2-2\alpha)(-2) = \alpha - 2$

$\iff 4\alpha - 4 = \alpha - 2 \iff 3\alpha = 2 \iff \alpha = \frac{2}{3}$

Hieruit volgt: $x_2 = 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = 7/3$

en : $x_1 = 1 - 2 \cdot 7/3 - 2 \cdot (-2) = \frac{1}{3}$

Dus $\underline{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}$

c/

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \beta \\ 1 & -1 & \beta+7 & 2\beta-2 \\ 3 & 0 & \beta+8 & 3\beta \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & \beta-2 \\ 0 & -2 & \beta+5 & 2\beta-4 \\ 0 & -3 & \beta+2 & 3\beta-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \beta+11 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \beta+11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uit het rangtheorema volgt dat Rang (B) en dim(NUL(B)) beide gelijk moeten zijn aan 2. Dit impliceert dat matrix B twee pivot-posities moet hebben, en dat is zo als $\beta = -11$

Opg. 2 a) Onjuist,

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Omdat i.h.a. $AB \neq BA$ zal i.h.a. $AB+BA$ ongelijk zijn aan $2AB$.

Dit betekent dat $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ **niet** voor elk tweetal $n \times n$-matrices A en B geldt. (Het is niet moeilijk een tegenvb. te vinden)

b) Onjuist,

Ook bijv. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ is gelijk aan zijn eigen inverse

c) Juist,

zij $\underline{w} \in W$ dan kan men schrijven $\underline{w} = c_1 \underline{a} + c_2 \underline{b} + c_3 \underline{c}$ voor zekere gewichten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nu geldt: $\underline{x} \cdot \underline{w} = \underline{x} \cdot (c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3)$

$= c_1(\underline{x} \cdot \underline{a}_1) + c_2(\underline{x} \cdot \underline{a}_2) + c_3(\underline{x} \cdot \underline{a}_3)$

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0$

Hieruit volgt dat $\underline{x} \perp W$ $\boxtimes$

Opg. 3 a)

$\underline{e}_1 \xrightarrow{\text{spieg.}} -\underline{e}_1 \xrightarrow{\text{Rot.}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{5}{6}\pi) \\ \sin(\frac{5}{6}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\underline{e}_2 \xrightarrow{\text{spieg.}} \underline{e}_2 \xrightarrow{\text{Rot.}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{3}\pi) \\ \sin(\frac{1}{3}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Dus $A = \begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

b) Los op $T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, dus beschouw:

$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \end{array}\right] \underset{(\times\sqrt{3})}{} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2} & \sqrt{3} \end{array}\right] \begin{matrix} +1 \\ \downarrow \end{matrix} \sim$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \end{array}\right] -\tfrac{1}{4} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \end{array}\right]$$

Hieruit volgt $x_1 = \frac{1}{2}$ en $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
dus $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (Dit valt ook meetkundig in te zien)

c) Los op $S(\underline{x}) = \underline{0}$, dus beschouw:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 10 & 0 \\ -2 & -5 & -41 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} +2 \\ -3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & -21 & 0 \\ 0 & -3 & -21 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} +1/3 \\ -1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De opl^n van $S(\underline{x}) = \underline{0}$ zijn dus de vectoren $\underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_3 \in \mathbb{R}$

Dit betekent dat $NUL(S) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
en bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $NUL(S)$.

Uit bovenstaande veegpartij volgt ook dat $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ een basis is van $\mathcal{R}(S)$,

want dit zijn de pivotkolommen v/d standaardmatrix van S.

Opg. 4 a) Pas het Gram-Schmidt-proces toe op de kolommen van C (deze kol^n zijn onafh.):

$$\underline{b}_1 = \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = \underline{c}_2 - \left(\frac{\underline{c}_2 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_3 = \underline{c}_3 - \left(\frac{\underline{c}_3 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 - \left(\frac{\underline{c}_3 \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{15}{15}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ is een orthogonale basis van $\mathrm{COL}(C)$

b)

$$\underline{u} = \mathrm{proj}_{\mathrm{COL}(C)}(\underline{d}) = \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{b}_3}{\underline{b}_3 \cdot \underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Omdat $\mathrm{NUL}(C^T) = \mathrm{COL}(C)^\perp$ geldt

$$\underline{v} = \underline{d} - \underline{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Omdat $\underbrace{\dim(\mathrm{COL}(C))}_{=3} + \dim(\mathrm{COL}(C)^\perp) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4}$

volgt dat $\dim(\mathrm{COL}(C)^\perp) = 1$. Verder weten we uit onderdeel b) dat $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{COL}(C)^\perp$,

immers $\mathrm{COL}(C)^\perp = \mathrm{NUL}(C^T)$. Dit betekent dat bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ een basis is van $\mathrm{COL}(C)^\perp$