TU Delft

Faculteit EWI, afdeling DIAM
Tentamen Lineaire Algebra (deel1), wi1273TA
Vrijdag 13 april 2012, 9.00-11.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.
- Normering:

Opg. 1a 2 2 +	Opg. 2a 2	Opg. 3a 1 3 +/–	Opg. 4a $2\frac{1}{2}$
Opg. 1b 1 $1\frac{1}{2}$ +	Opg. 2b 2	Opg. 3b 1 2	Opg. 4b 2
Opg. 1c 1 2 +/–			Opg. 4c $1\frac{1}{2}$
Opg. 1d 2 –			

---

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 &= -4 \\ 10x_1 + 4x_2 + \alpha^2 x_3 &= \alpha^2 \end{cases}$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.
De *coëfficiëntenmatrix* van dit stelsel lineaire vergelijkingen noemen we C.

a. Ga na voor welke waarde(n) van α dit stelsel strijdig is.

b. Neem $\alpha = 2$ en ga na of $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in COL(C)$.

c. Neem $\alpha = 1$ en bereken welke vector $\underline{x} \in NUL(C)$ de afstand tot vector $\underline{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ minimaliseert.

d. Gegeven is de $4 \times 4-$ matrix $B = \left[\underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \underline{b}_3\ 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 - \underline{b}_3\right]$, waarbij het stelsel vecoren $\{\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \underline{b}_3\}$ lineair onafhankelijk is (de vectoren $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ en $2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 - \underline{b}_3$ vormen dus de 4 kolommen van matrix B). Geef een basis van $NUL(B)$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende twee beweringen:

a. **Bewering 1**: Voor elke $n \times n-$ matrix A met de eigenschap dat $A^2 = 0_{n,n}$ geldt dat $I_n - A$ inverteerbaar is en $I_n + A$ de inverse is van $I_n - A$.

b. **Bewering 2**: Als $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2\}$ een orthonormale basis (dus een orthogonale basis van eenheidsvectoren) is van $\mathbb{R}^2$ en $\underline{x} = c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2$ waarbij c_1 en c_2 reële gewichten zijn,dan geldt $\|\underline{x}\|^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2$.

z.o.z.

3. Gegeven zijn de volgende twee lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de lineaire afbeelding met standaardmatrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ en

$\mathcal{T}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de spiegeling in de lijn $l = Span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$.

a. Geef een basis van $NUL(\mathcal{T}_1)$, een basis van $R(\mathcal{T}_1)$ en een meetkundige beschrijving van $\mathcal{T}_1$.

b. Geef een voorschrift voor $\mathcal{T}_2$.
(Hint: bedenk een verband tussen $\mathcal{T}_2(\underline{x})$ en $proj_l(\underline{x})$ als $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$)

4. Gegeven zijn de lineaire deelruimte $W = Span\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

en de vector $\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

a. Construeer een orthogonale basis van W.

b. Bepaal een vector $\underline{w} \in W$ en een vector $\underline{u} \in W^\perp$ (het orthogonale complement van W in $\mathbb{R}^4$) zodat $\underline{c} = \underline{w} + \underline{u}$.

c. Geef een basis van $W^\perp$.