Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra (deel 1), wi1273TA
Woensdag 19 januari 2011, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

1. Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	2	Opg. 4	2	Opg. 5a	$2\frac{1}{2}$
Opg. 1b	2	Opg. 2b	2	Opg. 3b	2			Opg. 5b	2
		Opg. 2c	2					Opg. 5c	2

---

1. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 2+\alpha^2 \end{bmatrix}$

   en vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 3\beta - 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Ga na voor welke waarde(n) van α het stelsel vectoren $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is.

   (b) Neem $\alpha = 0$ en bepaal voor welke waarde(n) van β geldt $\underline{b} \in Span\ \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

   (a) **Bewering 1:** Als A, B en C $n \times n-$ matrices zijn, A en B inverteerbaar zijn en $A^T = B^{-1}CA$ dan volgt dat ook matrix C inverteerbaar is.

   (b) **Bewering 2:** De verzameling $H = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = 0 \text{ en } x_1 = x_3 \right\}$ is een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^3$.

   (c) **Bewering 3:** Het verband $\dim(NUL(D^T)) + \dim(ROW(D)) = m$ is geldig voor elke $m \times n-$ matrix D.

3. Zij $\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die $\underline{e}_1$ afbeeldt op $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ op $\underline{e}_2 - 2\,\underline{e}_1$ (een zgn. horizontal shear) en $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de samenstelling van eerst $\mathcal{S}$ en vervolgens de orthogonale projectie op $Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

   U mag in deze opgave aannemen dat afbeelding $\mathcal{T}$ lineair is.

   (a) Geef de standaardmatrix van $\mathcal{T}$.

   (b) Geef een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.

4. Gegeven is de matrix $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4\frac{1}{2} & \beta \end{bmatrix}$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

   Ga na voor welke waarde(n) van β geldt $NUL(B) = COL(B)$.

5. Gegeven zijn de matrix $A = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3\ \underline{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   en vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Bepaal een orthogonale basis van $COL(A)$.

   (b) Bepaal een basis van $COL(A)^{\perp}$, het orthogonale complement van $COL(A)$ in $\mathbb{R}^4$.

   (c) Ontbind $\underline{b}$ in een component $\underline{u} \in COL(A)$ en een component $\underline{w} \in COL(A)^{\perp}$.