Uitwerking

Opg. 1: Beschouw
$$[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3 \mid \underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \\ -1 & 1 & -6 & 3\beta-7 \\ 0 & \alpha & 2+\alpha^2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2 \quad +1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 3\beta-4 \\ 0 & \alpha & 2+\alpha^2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} +1\tfrac{1}{2} \quad +\tfrac{1}{2}\alpha \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta-7 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha+2 & 4-\alpha \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha+2 & 4-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3\beta-7 \end{array}\right]$$

Uit dit veegproces volgt:

a) $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ is Lineair onafh. $\Leftrightarrow$ matrix $[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3]$ heeft 3 pivotposities $\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+2 \neq 0$

Daar $\alpha^2+2\alpha+2 = (\alpha+1)^2+1 > 0$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ volgt nu dat $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ Lineaire onafh. is voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\underline{b} \in \text{Span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\} \Leftrightarrow$ het Lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$, waarbij $A = [\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \underline{a}_3]$ is oplosbaar

$\Leftrightarrow 3\beta - 7 = 0 \Leftrightarrow \beta = 7/3$

(Dit geldt overigens voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$, daar $\alpha^2+2\alpha+2 \neq 0$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$, maar voor dit onderdeel mag men $\alpha = 0$ stellen)

Opg. 2: a) Waar, want uit $A^T = B^{-1}CA$ volgt dat $C = BA^TA^{-1}$ (immers A is inverteerb. en alle matrices hebben de afmeting $n\times n$)

Daar C het produkt is van inverteerb. $n\times n$-matrices (A^T en A^{-1} zijn inverteerb. $n\times n$-matrices omdat A een inverteerb. $n\times n$-matrix is, en gegeven is dat B een inverteerb. $n\times n$-matrix is) is ook C een inverteerb. $n\times n$-matrix $\boxtimes$

b) Waar

Bewijs 1: *) $\underline{0} \in H$, neem $x_1 = x_3 = 0$

*) Zij $\underline{x}, \underline{y} \in H$, dan kan men schrijven $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ en $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ voor zekere $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$.

Dan geldt vervolgens $\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} \in H$

(immers het tweede kental is 0 en het eerste en derde kental zijn aan elkaar gelijk)

H is dus gesloten t.a.v. de optelling

*) Zij $\underline{x} \in H$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan kan men schrijven $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ voor zekere $x_1 \in \mathbb{R}$.

Dan geldt vervolgens $\alpha \underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \\ \alpha x_1 \end{bmatrix} \in H$

H is dus gesloten t.a.v. het scalaire produkt. $\boxtimes$

Bewijs 2: $H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bijgevolg een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^3$ $\boxtimes$

Bewijs 3: $H = \text{NUL}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ en bijgevolg een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^3$ $\boxtimes$

c) Waar, want toepassing v/h Rangtheorema op D^T geeft: $\dim(\text{NUL}(D^T)) + \dim(\text{COL}(D^T)) = m$

Daar $\text{COL}(D^T) = \text{ROW}(D)$ volgt nu:

$\dim(\text{NUL}(D^T)) + \dim(\text{ROW}(D)) = m$ $\boxtimes$

Opg. 3: a) $\underline{e}_1 \xrightarrow{S} \underline{e}_1 \xrightarrow{proj} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$e_2 \xrightarrow{S} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{proj} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Immers:

$$proj_{Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}}(\underline{e}_1) = \left(\frac{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot \underline{e}_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

(dit is overigens ook meetkundig evident)

$$proj_{Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

De gezochte standaardmatrix is dus $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

b) Uit de standaardmatrix volgt

$NUL(T) = R(T) = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(Dit is overigens ook meetk. duidelijk)

Bijgevolg is bijv $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ een basis van zowel $NUL(T)$ als $R(T)$.

Opg. 4: Als $NUL(B) = COL(B)$ dan moet gelden

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in NUL(B)$, dus $B\begin{bmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \underline{0}$.

Dit betekent $\beta = -3$

Omgekeerd: als $\beta = -3$, dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4\frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$

en $NUL(B) = COL(B) = Span\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\}$.

Opg. 5: a) Omdat $\underline{a}_3 = \frac{2}{3}\underline{a}_1 + \frac{2}{3}\underline{a}_2$, $\underline{a}_2 - \underline{a}_1 = \underline{a}_4$ en $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ onafh. is, is $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ een basis van $COL(A)$. Hieruit construeren we een orthogonale basis $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Neem daartoe:

$$\underline{u}_1 = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{a}_2 - \left(\frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}\right)\underline{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{8}{10}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

neem $\underline{u}_2 = \frac{5}{3}\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dan is bijv.

$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ een orthogonale basis van $Col(A)$

b) Er geldt:

$\underline{x} \in Col(A)^{\perp} \Leftrightarrow \underline{x} \perp \underline{u}_1$ en $\underline{x} \perp \underline{u}_2$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$ en $2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \downarrow^{-2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] (\times -1/5)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \uparrow_{-2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_2 \text{ en } x_4 \text{ zijn vrij} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

Dit betekent:

$Col(A)^{\perp} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bijv.

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis (zelfs orthogonale basis) van $Col(A)^{\perp}$

(N.B. deze basis vindt men ook snel als men realiseert dat $\dim(Col(A)^{\perp}) = 2$ en vervolgens op handige wijze 2 onafh. vectoren in $Col(A)^{\perp}$ zoekt)

c) $\underline{u} = \text{proj}_{Col(A)} \underline{b} = \left(\frac{\underline{b} \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}\right) \underline{u}_1 + \left(\frac{\underline{b} \cdot \underline{u}_2}{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2}\right) \underline{u}_2$

$= \frac{24}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{10}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

en $\underline{w} = \underline{b} - \underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

N.B. Men kan $\underline{w}$ ook vinden door te projecteren op $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ omdat deze basis orthogonaal is