Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra (deel 1), wi1273TA
Vrijdag 1 april 2011, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+$2\frac{1}{2}$)/$2\frac{1}{2}$, afgerond op 1 decimaal, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & -10 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ en de vector

   $\underline{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \\ 6 \\ 3-\beta^2 \end{bmatrix}$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Voor welke waarde(n) van β geldt $\underline{b} \in COL(A)$?

   (b) Bepaal een basis van $NUL(A)$ en een basis van $COL(A)$.

   (c) Bepaal een afhankelijkheidsrelatie tussen de kolommen van A.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

   (a) **Bewering 1:** Als A, B en P $n \times n-$ matrices zijn, waarbij P inverteerbaar is, $A = PBP^{-1}$ en $B^3 = O_{n,n}$ dan geldt $A^5 = O_{n,n}$.

   (b) **Bewering 2:** Als C een $n \times n-$ matrix is met de eigenschap $C^2 = O_{n,n}$ dan is $I_n + C$ inverteerbaar en geldt $(I_n + C)^{-1} = I_n - C$.

   (c) **Bewering 3:** Als $\underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ dan geldt voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ dat $\dim(NUL(\underline{v}\underline{v}^T)) = 2$. (N.B. in dit onderdeel wordt vector $\underline{v}$ opgevat als een kolommatrix).

3. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die vectoren uit $\mathbb{R}^3$ eerst orthogonaal projecteert op $H = Span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en vervolgens roteert om de x_2- as over π radialen.

(a) Geef de standaardmatrix van $\mathcal{T}$.

(b) Bepaal een basis van $NUL(\mathcal{T})$ en een basis van $R(\mathcal{T})$.

4. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$,

   $\underline{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ en de lineaire deelruimte $H = \mathit{Span}\,\{\underline{a}_1,\, \underline{a}_2,\, \underline{a}_3\}$ in $\mathbb{R}^4$.

   (a) Construeer een orthogonale basis van H.

   (b) Ontbind vector $\underline{c}$ in een component $\underline{v} \in H$ en een component $\underline{w} \in H^{\perp}$ (het orthogonale complement van H in $\mathbb{R}^4$).

5. In $\mathbb{R}^4$ zijn het **orthogonale** stelsel vectoren $\{\underline{u}_1,\, \underline{u}_2,\, \underline{u}_3\}$ gegeven en de lineaire deelruimte $W = \mathit{Span}\,\{\underline{u}_1,\, \underline{u}_2,\, \underline{u}_3\}$. Bovendien wordt gegeven dat $\{\underline{u}_1,\, \underline{u}_2,\, \underline{u}_3,\, \underline{e}_1\}$ lineair onafhankelijk is (uiteraard staat $\underline{e}_1$ voor de eenheidsvector langs de eerste coördinaatas in $\mathbb{R}^4$). Leg uit hoe m.b.v. deze gegevens een basis van $W^{\perp}$ (het orthogonale complement van W in $\mathbb{R}^4$) kan worden gevonden.

	Opg. 1a	2	Opg. 2a	2	Opg. 3a	2	Opg. 4a	3	Opg. 5	2
Normering:	Opg. 1b	2	Opg. 2b	2	Opg. 3b	2	Opg. 4b	2		
	Opg. 1c	$1\frac{1}{2}$	Opg. 2c	2						